



## IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION LAYER

Luděk PEŠEK \*

***Summary:** This contribution deals with identification of parameters of non-linear reological couplings, which are used for numerical modelling of a dissipation layer. The layer is considered as elastomeric. The methodology for this identification is herein presented and tested on the study case of circular ring on visco-elastic layer cushioning. As a non-linear contribution to the elastic force of this coupling the cubic function was used.*

### 1. ÚVOD

Oblast regulace umělým tlumením, do které patří pasivní a aktivní tlumení zaváděná do systémů v podobě elastomerních nebo inteligentních materiálů převážně ve formě disipačních vrstev, hraje velmi významnou úlohu v konstrukcích moderních dopravních prostředků a je jí věnována stálá pozornost v odborné literatuře (např. [1],[2]).

U mechanických systémů s disipačními vrstvami tohoto typu jde o komplexní problém, který je možné ladit a optimalizovat vzhledem k amplitudo-frekvenčním kritériím jen na základě věrohodného matematického modelu reologického chování daného materiálu pro dané pracovní podmínky. Většina prací v této oblasti přitom vychází z předpokladu elastomeru jako lineárního materiálu, který není v mnoho případech dostatečný.

Pro zpřesnění popisu dynamického chování mechanických systémů s disipační vrstvou je proto nutné zabývat se i nelineárním chováním vratných a disipačních těchto vrstev s ohledem na způsob zatížení, typ namáhání a pracovní teplotu.

Tento příspěvek se zaměřen na návrh metodiky pro identifikaci parametrů nelineárních členů obecně zvoleného reologického modelu elastomeru pro matematické modelování dynamických vlastností mechanického systému s disipační vrstvou.

Pohybové rovnice problému jsou řešeny metodou malého parametru s využitím Greenových rezolvent [3]. Pro identifikaci parametrů reologického modelu byla využita metoda nelineární regrese, kdy výsledky experimentu byly simulovány numericky. Metodika byla testována na příkladu vazko-pružně uloženého prstence zatíženého radiálním rázem. Prsteneček byl modelován pomocí nosníkových prvků metodou MKP a jeho uložení modifikovanými radiálními Kelvinovými-Voigtovými členy zavedenými do uzlů prstence. Tyto členy měly vratnou sílu definovanou vedle lineární částí i kubickou funkcí výchylky. Cílem bylo identifikovat součinitel kubického členu.

### 2. NÁVRH METODIKY PRO ZPŘESNĚNÝ POPIS DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ MECHANICKÉHO SYSTÉMU S DISIPAČNÍ

Pro popis dynamického chování mechanických systémů s disipační vrstvou jsme jeho pohybové rovnice vyjádřili ve formě

---

\* Ing. Luděk Pešek, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8

$$\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_b(t) + \varepsilon\mathbf{p}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t), \quad (1)$$

kde matice tuhosti  $\mathbf{K}$ , tlumení  $\mathbf{B}$  a hmotnosti  $\mathbf{M}$  jsou obecně nehermitovské matice,  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  a  $\ddot{\mathbf{x}}$  vektory posuvů, rychlostí, resp. zrychlení. Vektor  $\mathbf{f}_b$  představuje vektor buzení a  $\mathbf{p}$  s malým parametrem  $\varepsilon$  vyjadřuje vektor slabých nelineárních vazeb, kde  $\mathbf{a}$  je vektor neznámých parametrů těchto vazeb. Zatímco levá strana (1) popisuje lineární část systému s uvažováním lineárního viskoelastického modelu, mohou být vazby  $\mathbf{p}$  navrženy na základě experimentu jako integrovatelné analytické funkce výchylek, rychlostí a času tak, aby vystihovali nelineární příspěvek reologického chování disipačních materiálů. Například při zavedení nelineární tuhosti vazby popsané maticí  $\mathbf{K}_N$  je vektor  $\mathbf{p} = \mathbf{K}_N \mathbf{x}$ .

Pro sestavení matic  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{M}$  rovnice (1) jsou použity numerické modely, které jsou dále redukovány na několik málo stupňů volnosti odpovídající dominantnímu kmitání popisovaného dynamického systému, které závisí na typu provozního buzení. Ve stavovém prostoru lze rovnici (1) vyjádřit

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{f} + \varepsilon\boldsymbol{\pi}, \quad (2)$$

$$\text{kde } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix},$$

Redukce soustavy (2) se provede pomocí submatic  $\tilde{\mathbf{X}}$  a  $\tilde{\mathbf{Y}}$  vybraných pravostranných, resp. levostranných vektorů modálních matic  $\mathbf{X}$ , resp.  $\mathbf{Y}$  též rovnice v homogenním tvaru. Dostáváme

$${}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{v}} - {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{v} = {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{f} + \varepsilon {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\pi} \quad (3)$$

kde symbol  $\mathbf{v}$  představuje vektor hlavních souřadnic. Rovnici (3) můžeme formálně zjednodušit na tvar

$$\tilde{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{f}} + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \quad (4)$$

kde  $\tilde{\mathbf{P}} = {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\tilde{\mathbf{N}} = {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}} = {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{f}$  a  $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = {}^H \tilde{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\pi}$ . Pak lze lineární aproximaci řešení  $\mathbf{v}$  rovnice (4) pro čas  $t$  a pro nulové počáteční podmínky vyjádřit pomocí matice Greenových rezolvent  $\Gamma(t - \tau)$  vzorcem

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_L(t) + \varepsilon \mathbf{v}_N(t), \quad (5)$$

kde  $\mathbf{v}_L(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \tilde{\mathbf{f}}(\tau) d\tau$ ,  $\mathbf{v}_N(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \tilde{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}, \tau) d\tau$ ,  $\Gamma(t - \tau) = \mathbf{V} e^{(t-\tau)\mathbf{D}} \mathbf{W}^H$ . Matice  $\mathbf{V}$  a

$\mathbf{W}$  představují matice pravostranných a levostranných vlastních vektorů a  $\mathbf{D}$  spektrální matici rovnice (4) v homogenním tvaru a splňují podmínku ortonormality  ${}^H \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{I}$ .

Řešení nelineární rovnice (5) lze provést například Newtonovou-Raphsonovou iterační metodou. Do původních souřadnic z redukovanych hlavních souřadnic se dostaneme vztahem

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{v} \quad (6)$$

Dalším krokem je formulace této úlohy z hlediska identifikace neznámých reologických parametrů vektoru  $\mathbf{a}$  disipační vrstvy. Pro jejich určení vycházíme z minimalizace cílové funkce

$$\min \left[ {}^T (\mathbf{x}_E - \mathbf{x})(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}) \right] \rightarrow 0, \quad (7)$$

kde  $\mathbf{x}_E$  jsou experimentálně získaná data, metodou nelineární regrese, která vede při použití Newtonovy-Raphsonovy metody na iterační řešení přeúrcené soustavy rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{a}_i} \Delta \mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{x}_E - \mathbf{x}_i, \quad (8)$$

s použitím Monroeho-Penroseovy pseudoinverze. Písmenem  $i$  zde označujeme iterační krok; pro  $i=0$  je nutné stanovit počáteční odhad neznámých parametrů. Pro posouzení konvergence je vyhodnocována euklidovská norma residua  $RES_i = \|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_i\|$  v každém iteračním kroku.

### 3. TESTOVACÍ PŘÍKLAD – VAZKO-PRUŽNĚ ULOŽENÝ PRSTENEC PŘI RÁZOVÉM ZATÍŽENÍ

K testování navržené metodiky identifikace byl použit případ vazko-pružně uloženého prstence. Prstavec byl modelován metodou MKP pomocí třiceti nosíkových prvků s radiálně orientovanými upravenými Kelvinovými-Voigtovými členy zavedenými do uzlů prstence (viz obr.1). Tyto členy měly vratnou  $f_v$  a disipační  $f_d$  sílu definovanou jako

$$f_v = a_1 x + a_{nl} x^3, f_d = b \dot{x}, \quad (8)$$

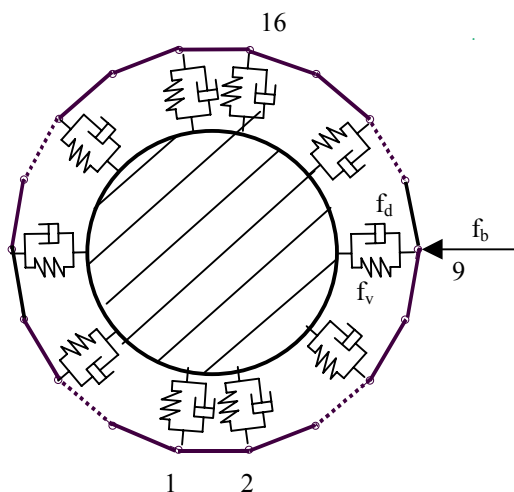
kde  $x$ ,  $\dot{x}$  je výchylka členu, resp. její rychlost. Tedy vektor  $\mathbf{a}$  se pro tento případ redukuje na jeden prvek  $a_{nl}$ . Vstupní parametry numerického modelu: modul pružnosti ocelového prstence  $E=1.99e11$  Pa, hustota  $\rho=7831$  kg/m<sup>3</sup>, Poissonova konstanta  $\mu=0.28$ ,  $a_1=3.77e5$  N/m,  $b=125.2$  N/ms<sup>-1</sup>, počáteční odhad součinitele  $a_{nl0}=2.609e8$  N/m, časový krok integrace  $\Delta t=16e-6$  s. Zatížení prstence bylo realizováno silovým pulsem typickým při dopadu razníku (obr.2) v uzlu 9 (obr.1). Odhad parametrů lineárního Kelvinova-Voigtova modelu je popsán v [4].

Pro identifikaci parametru  $a_{nl}$  podle (7) jsme vybrali časovou odezvu prstence na dané rázové zatížení v uzlu 9, tedy v místě buzení. Tato odezva byla počítána na redukovaném modelu prstence se třemi hlavními souřadnicemi. Pro redukci byly vybrány první tři vlastní tvary, které odpovídají pohybu prstence jako tuhého tělesa na pružném podkladě. Vlastní frekvence těchto tvarů byly: 136,67Hz, 136,67Hz a 191,8Hz. Násobnost prvních dvou vlastních frekvencí je dána osovou symetrií úlohy. Rázovým zatížením v uzlu 9 je dominantně vybuzen 1.mód, který představuje pohyb prstence

ve směru horizontálním. Simulace experimentu byla provedena výpočtem nestacionární odezvy na takto redukovaném modelu prstence při použití součinitele  $a_{nlR}=2.609e9$  N/m metodou Newmarkovy integrace ( $\gamma=0.5, \beta=0.25$ ) pro nelineární dynamiku [5].

#### Výsledky identifikace:

Po sedmi iteračních krocích výpočtu přeúrcené rovnice (8) jsme identifikovali součinitel  $a_{nl7}=2.6088e8$  N/m, což proti očekávané hodnotě  $a_{nlR}$  činí chybu odhadu cca 8e-3%. V obr. 3 jsou vyneseny plnou

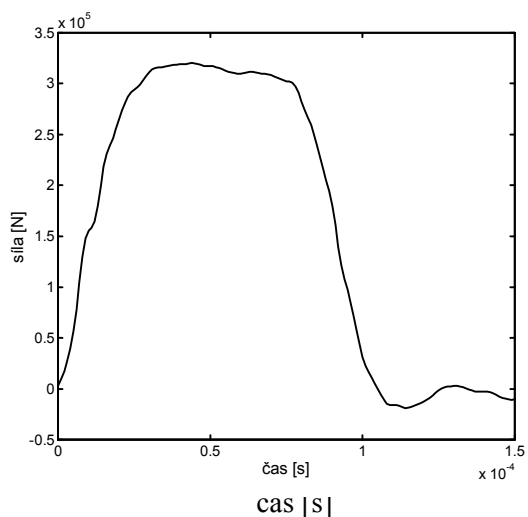


Obr.1 Schéma MKP modelu prstence s vazko-pružnými členy.

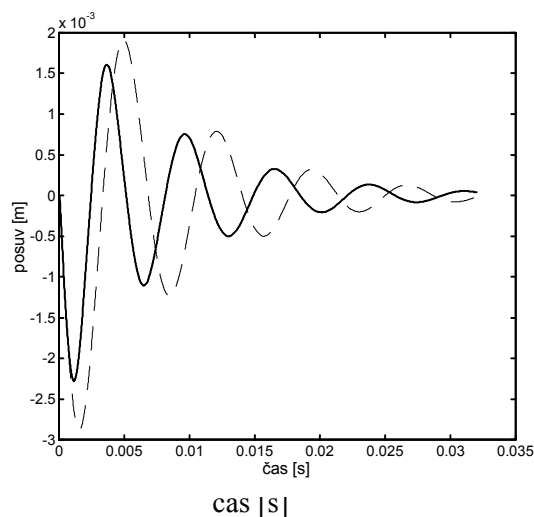
čarou odezvy “experimentální“ a vypočtené pro identifikovanou hodnotu  $a_{nl7}$ . Obě křivky splývají a jsou v tomto zobrazení neodlišitelné. Čerchovanou čarou je pro zajímavost zobrazena odezva vypočítaná pro počáteční odhad  $a_{nl0}$ . Dosažené výsledky ukazují na dostatečnou přesnost, dobrou konvergenci a na poměrně malé časové nároky na výpočet, kdy metoda malého parametru mnohem účinněji pro tento typ úloh počítá nestacionární odezvy a jejich citlivosti na reologických parametrech **a** než klasické implicitní či explicitní integrační metody používané v MKP [5].

i-tá iterace	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$RES_i / \  \mathbf{x}_E \ $	1.3505	0.8566	0.3361	0.0496	0.0011	0.0002	0.0002
$\Delta a_{nli}$	6.21e8	9.21e8	6.72e8	1.30e8	0.028e8	0.00e7	0.00e6

Tab.1 Norma residuů a změny součinitele  $a_{nl}$  v iteracích  $i=1,2,\dots,7$ .



Obr.2 Časový průběh zatěžovacího pulsu



Obr. 3 Odezva prstence na rázové zatížení v uzlu 9 vypočtená pro různé hodnoty součinitele  $a_{nl}$ : plná čára –  $a_{nl7}$  a  $a_{nlR}$ , čerchovaná čára -  $a_{nl0}$ .

#### 4. ZÁVĚR

V příspěvku byla prezentována metodika pro identifikaci parametrů nelineárních členů reologických modelů disipační vrstvy. Na případě prstence uloženého na modifikovaných Kelvinových-Voigtových vazko-pružných prvcích s příspěvkem kubické vratné síly, kdy byl identifikován součinitel této nelineární závislosti, byla metodika ověřena pro numericky simulovaný experiment.

V další etapě budou výpočetní programy rozšířeny o identifikaci parametrů nelineárních funkcí disipačních sil a metodika bude aplikována na vybraný fyzikální model mechanického systému s disipační vrstvou pro hledání vhodného reologického modelu chování vrstvy a k identifikaci jeho parametrů.

## 5. LITERATURA

- [1] Markuš, Š (1996): The role of structural damping in mechanical engineering, Strojnícky časopis, 47, no.3,1996, pp. 149- 161.
- [2] Mead J Denys (1999): Passive Vibration Control, John Wiley & Sons, 1999.
- [3] Daněk, O, Kozánek, J. (1998): Matematické modely dynamických systémů obecné struktury, Strojnícky časopis, 49, 1998, č.2.
- [4] Pešek, L.(1990): Ráz na kruhový prstenec uložený na poddajném disku, Výzkumná zpráva ÚT AV ČR, Z1142/90, Praha, 1990.
- [5] Owen D.R.J., Hinton E.(1980): Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.

*Príspevek byl vypracován v rámci řešení pilotního projektu ÚT AV ČR č.50345:Identifikace parametrů nelineárního reologického modelu disipační vrstvy mechanického systému.*