



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002
13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

NÁVRH ORIENTACE VRSTEV LAMINÁTOVÉ DESKY MAXIMALIZUJÍCÍ MÍRU TUHOSTI

T. Mareš, St. Holý¹

Anotace: Práce popisuje deformační přístup k návrhu orientace jednotlivých ortotropních vrstev příčně zatížené prostě podepřené kompozitní (laminátové) desky. Cílem práce je určení orientace jednotlivých vrstev mající za následek minimální hodnotu jisté míry tuhosti desky daných rozměrů, daných elastických vlastností ortotropních vrstev při daném příčném zatížení. Mírou tuhosti je zde volen skalární součin příčného zatížení a příčné deformace střední plochy. Při výpočtu byla uvažována laminátová deska symetrická vzhledem ke střední rovině. Na rozdíl od běžného přístupu k podobným úlohám, kde se bere v úvahu pouze takzvaný vyrovnaný (balanced) laminát, zde tento předpoklad opouštíme, čímž se zvyšuje škála možných variant návrhu a tedy, matematickým jazykem řešeno, hledáme silnější řešení. V článku je uveden postup vedoucí ke konečné formalizaci optimalizační úlohy, metoda jejího řešení a představení získaných výsledků.
Klíčová slova: Orientace ortotropních vrstev, laminátová deska, míra tuhosti desky.

1 Abstract

Optimálním se na různých místech míní různé. V našem případě buď optimální orientací vláken laminátové desky taková orientace vláken jednotlivých vrstev této desky, při níž níže definovaná míra poddajnosti \mathcal{D} dosáhne svého minima (příslušná míra tuhosti tedy dosáhne svého maxima).

Míru poddajnosti \mathcal{D} definujeme vztahem

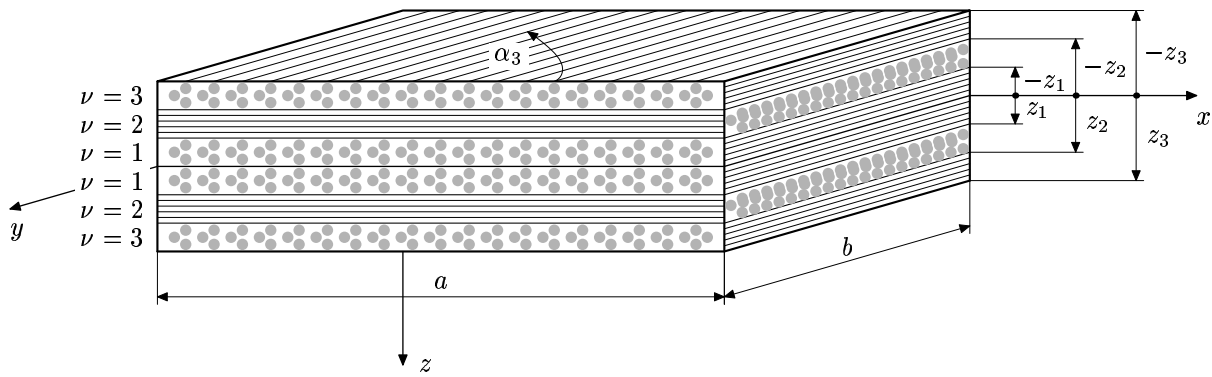
$$\mathcal{D} = \int_{\omega} w(x, y) q(x, y) dx dy,$$

kde ω je průmět desky ležící v rovině x - y do této roviny, $w(x, y)$ je průhybová plocha střední vrstvy desky a $q(x, y)$ je funkce vyjadřující příčné zatížení v místě (x, y) vztažené na jednotku plochy.

Uvažujme laminátovou desku po obvodě prostě podepřenou složenou z $2N$ ortotropních vrstev, jejíž vrstvy o dané tloušťce mají orientaci vláken shodnou s vrstvou ležící v poloze symetrické dle střední roviny x - y . (Takřečená symetrická laminátová deska.) Sousední vrstvy jsou vzájemně dokonale spojeny – hranice mezi sousedními vrstvami je nekonečně tuhá, deformace je napříč hraniční plochou spojitá. Dále uvažujme splnění předpokladů z Kirchhoffovy teorie desek a klasický konstitutivní

¹ing. Tomáš Mareš, Ústav mechaniky, České vysoké učení technické, strojní fakulta, Technická 4, 166 07 Praha 6, e-mail: mares@sgi.fsfd.cvut.cz

prof. ing. Stanislav Holý, CSc., Ústav mechaniky, České vysoké učení technické, strojní fakulta, Technická 4, 166 07 Praha 6, e-mail: holys@fsfd.cvut.cz



Obrázek 1: Uvažovaná laminátová deska složená z $2N = 2 \cdot 3$ ortotropních symetricky kladených vrstev

vztah laminátové vrstvy vyjádřený v souřadném systému položeném do hlavních ortotropních směrů² výrazem

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^\nu \\ \sigma_{22}^\nu \\ \sigma_{12}^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^\nu \\ \varepsilon_{22}^\nu \\ \varepsilon_{12}^\nu \end{pmatrix},$$

kde $(\nu = 1, 2, \dots, N)$ udává pořadí vrstvy od střední plochy desky.

Shora slovně vyřčenou optimalizační úlohu lze při využití tenzorového počtu, věty o minimu potenciální energie, Variáčního počtu, věty o Lagrangeových multiplikaátorech, kolokační metody a jisté dávky fantazie formalizovat ve tvaru matematické extrémální úlohy

$$\{\hat{e}_\nu, \hat{w}_{kl}\} = \arg \min_{e_\nu, w_{kl} \in \mathbb{W}} \sum_{k,l=1}^{K,L} w_{kl} \mathcal{Q}_{kl},$$

kde

$$\mathcal{Q}_{kl} = \int_{\omega} q(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy,$$

$$\mathbb{W} = \{e_\nu (\nu = 1, 2, \dots, N), w_{kl} (k = 1, 2, \dots, K) (l = 1, 2, \dots, L) \mid$$

$$\sum_{k,l=1}^{K,L} \sum_{\nu=1}^N \left(\zeta_\nu (1 - e_\nu^2)^2 P_1^{kl|ij} + \zeta_\nu e_\nu (1 - e_\nu^2)^{3/2} P_2^{kl|ij} + \zeta_\nu e_\nu^2 (1 - e_\nu^2) P_3^{kl|ij} + \right. \\ \left. + \zeta_\nu e_\nu^3 (1 - e_\nu^2)^{1/2} P_4^{kl|ij} + \zeta_\nu e_\nu^4 P_5^{kl|ij} \right) \cdot w_{kl} = q(x_i, y_j)\},$$

kde dále

$$\zeta_\nu = \frac{1}{3} (z_\nu^3 - z_{\nu-1}^3)$$

(při čemž význam symbolu z_ν je patrný z hořejšího obrázku), x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, I$), ($j = 1, 2, \dots, J$) jsou kolokační body a $P_m^{kl|ij}$ ($m = 1, 2, \dots, 5$) jsou známá čísla, jejichž velikost závisí na příslušných zadaných podmínkách.

²Srvn. [2] s. 53.

Hledané veličiny e_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) představují sinovou hodnotu úhlu orientace ν -té vrstvy, tedy $e_\nu = \sin \alpha_\nu$ ($\alpha_\nu \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$) a w_{kl} představuje prvních $K \cdot L$ koeficientů Fourierovy řady příslušné funkci průhybové plochy střední vrstvy laminátové desky

$$w(x, y) = \sum_{k,l=1}^{K,L} w_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}.$$

Při využití metod genetických algoritmů a geometrického programování byly ve dvou variantách úlohy získány v předkládané práci citované výsledky.

2 Výpočtové závěry

Získané výsledky jsou shrnuty ve dvou následujících sloupcích, kde výsledky příslušné jednomu zadání leží v levém sloupci a výsledky příslušné druhému zadání ve sloupci pravém. Na obrázku 2 nacházejícím se za tabulkou hodnot zadání je graficky znázorněn průběh příčného spojitého zatížení uvažované desky. V druhém řádku obrázků, tedy na obrázku 3 je graficky znázorněna orientace vláken jednotlivých vrstev příslušejících desce vykazující maximální míru tuhosti. V dalších dvou skupinách obrázků (na obrázcích 4 a 5) jsou znázorněny další varianty řešení s touže mírou tuhosti, jako je v případě desek s orientací dle obrázku 3. Obrázek 6 pak schematicky znázorňuje průběh průhybové plochy střední vrstvy příslušné prostě podepřené desky. Obrázek 7 zobrazuje řešení úlohy se zadáním jako v druhém případě s tím rozdílem, že tentokrát uvažujeme laminát složený ze 4 vrstev.

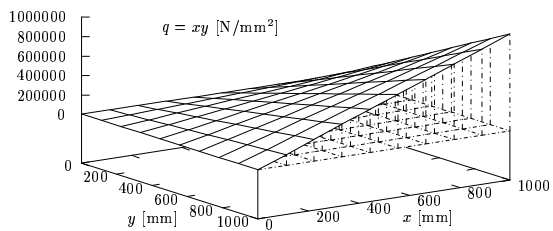
Zadání první		Zadání druhé
$\zeta_\nu = 5 \text{ mm}^3$	(pro všechny vrstvy shodná)	$\zeta_\nu = 5 \text{ mm}^3$
$a = 1000 \text{ mm}$	rozměr desky ve směru osy x	$a = 1000 \text{ mm}$
$b = 1000 \text{ mm}$	rozměr desky ve směru osy y	$b = 500 \text{ mm}$
$I = 11$	počet kolokačních bodů ve směru osy x	$I = 11$
$J = 11$	počet kolokačních bodů ve směru osy y	$J = 11$
$N = 3$	počet dvouvrstev symetrického laminátu	$N = 3$

Materiálové charakteristiky Kevlar-Epoxy kompozitu uvažované pro obě zadání:

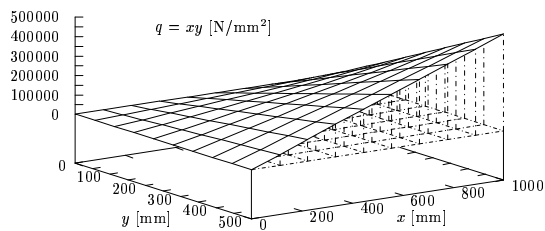
$$\begin{aligned}
 E_1 &= 76000 \text{ MPa} & \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1 \\
 E_2 &= 5500 \text{ MPa} & Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\
 G_{12} &= 2300 \text{ MPa} & Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\
 \nu_{12} &= 0.34 & Q_{12} &= \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}).
 \end{aligned}$$

3 Závěr

Získané výsledky ukazují, že přes odbourání požadavku vyrovnanosti uvažované laminátové desky výsledný návrh s největší mírou tuhosti spadá do třídy vyrovnaných laminátů. Tento výsledek autoři považují za významný z toho důvodu, že při běžných návrhových a optimalizačních výpočtech ulehčí zavedení předpokladu vyrovnanosti výpočtovou námahu.

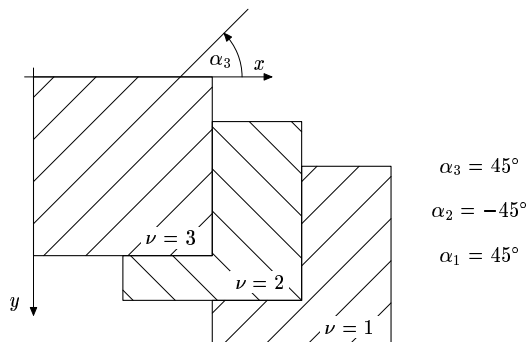


(a) V případě zadání prvního

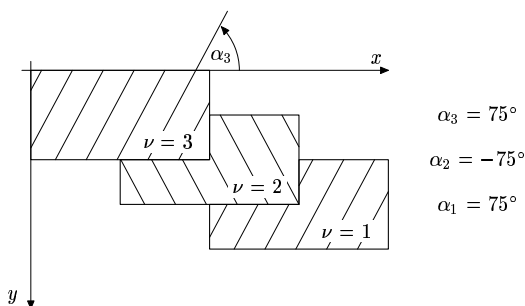


(b) V případě zadání druhého

Obrázek 2: Průběh daného příčného spojitého zatížení $q(x, y) = xy$ [N/mm²]

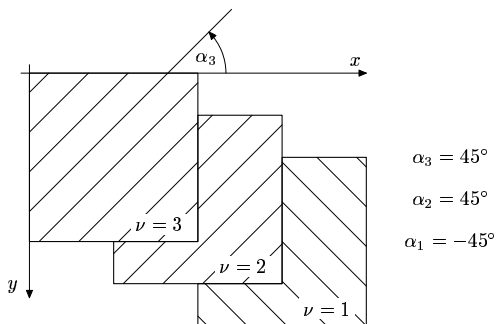


(a) V případě zadání prvního

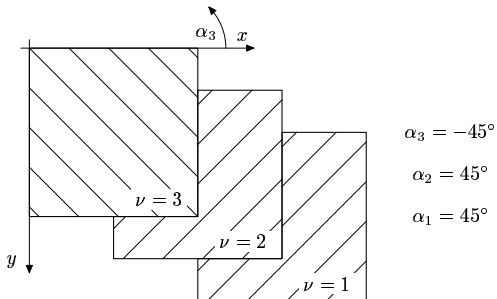


(b) V případě zadání druhého

Obrázek 3: Grafické znázornění orientace vláken jednotlivých vrstev

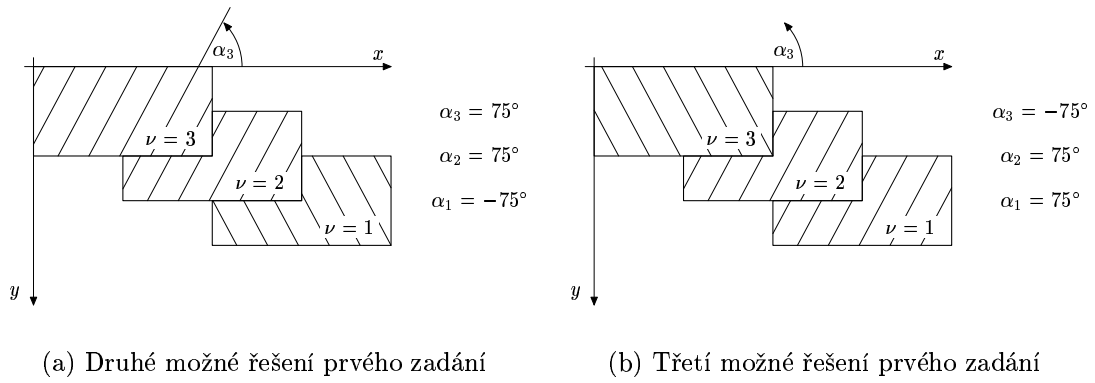


(a) Druhé možné řešení prvního zadání

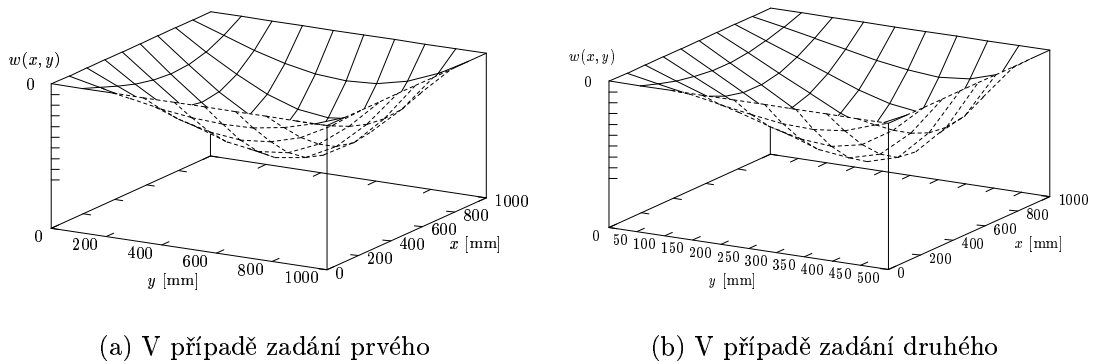


(b) Třetí možné řešení prvního zadání

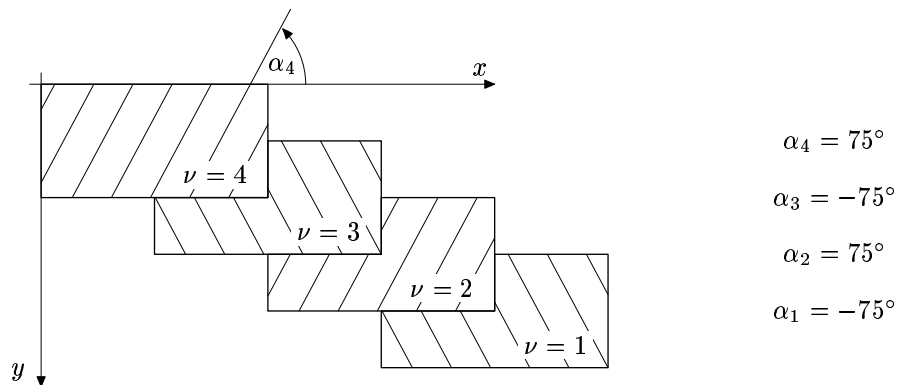
Obrázek 4: Grafické znázornění orientace vláken jednotlivých vrstev vykazující shodnou míru příčné tuhosti desky z prvního zadání jako řešení z obrázku 3(a)



Obrázek 5: Grafické znázornění orientace vláken jednotlivých vrstev vykazující shodnou míru příčné tuhosti desky z druhého zadání jako řešení z obrázku 3(b)



Obrázek 6: Deformovaný tvar průhybové plochy daný funkcí $w(x, y)$



Obrázek 7: Grafické znázornění orientace vláken jednotlivých vrstev čtyřvrstvého laminátu s dalším zadáním dle zadání druhého

Literatura

- [1] Alexejev, V. M., Tichomirov, V. M., Fomin, S. V.: Matematická teorie optimálních procesů. Praha, Academia 1991.

- [2] Gürdal, Z., Haftka, R. T., Hajela, P.: Design and Optimization of Laminated Composite Materials. New York, John Wiley & Sons 1999.
- [3] Goldberg, D. E.: Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley Publ. Co. 1989.
- [4] Rektorys, K.: Přehled užití matematiky, I. a II. díl. Praha, Prometheus 1995.
- [5] Vitásek, E.: Numerické metody. Praha, SNTL 1987.
- [6] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity nad Plasticity. 2nd ed. Oxford, Pergamon Press 1975. (Ruský překlad: Variacionnyje metody v teorii uprugosti i plastičnosti. Moskva, Mir 1987.)
- [7] Wilde, D. J.: Globally Optimal Design. New York, John Wiley & Sons 1978.