

## ESTIMATION OF GENERALIZED STRESS INTENSITY FACTOR VALUES FOR STRUCTURES WITH THIN PROTECTIVE COATINGS

J. Korbel\*, Z. Knésl\*\*

**Summary:** *In present paper, generalized stress intensity factor  $H_I$  for structures with cracked protective coatings is calculated. Based on numerical results obtained by finite element method calculations, the approximate expression for estimation of  $H_I$  is derived as a function of elastic parameters of the coating and the substrate. Application of this expression provides easy evaluation of critical stress leading to failure of structures with protective coating.*

### 1. Úvod

Povrchové trhliny hrají významnou roli při iniciaci porušení jak v případě statického tak i cyklického namáhání. Klíčovým krokem při odhadu vlivu povrchových trhlin na jejich další šíření a v konečné fázi i porušení konstrukce je znalost odpovídající hodnoty faktoru intenzity napětí. Problematika stanovení hodnot faktoru intenzity napětí (FIN) je celkem uspokojivě vyřešena a existující numerické metody (zejména metoda konečných prvků a hraničních integrálů) poskytují možnost spolehlivých výpočtů FIN i v případě komplikovaných geometrií a okrajových podmínek se kterými se setkáváme v praxi. Na druhé straně se však v celé řadě případů pro stanovení (případně odhad) hodnot faktoru intenzity napětí používají aproximativní výrazy. Typickým příkladem takové situace je výraz pro hodnotu FIN pro krátkou povrchovou trhlinu délky  $a$  v taženém pásu, kdy se běžně používá aproximativní vztah  $K_I \approx 1,12 \sigma_{appl} \sqrt{\pi a}$ , kde  $\sigma_{appl}$  je odpovídající aplikované napětí (předpokládá se normálové namáhání), např. Benthem (1973) nebo Broek (1988). Tento vztah pak umožňuje (v případě křehkého porušení) odhad kritické hodnoty aplikovaného napětí  $\sigma_{crit}$ , při kterém se začne trhlina šířit do hloubky tělesa ve tvaru

$$\sigma_{crit} = \frac{K_{IC}}{1.12\sqrt{\pi a}} \quad (1)$$

kde  $K_{IC}$  je hodnota lomové houževnatosti materiálu.

V případě konstrukcí s ochranou povrchovou vrstvou mohou v této vrstvě vzniknout povrchové trhliny, které se šíří přes tuto vrstvu a zastaví se na rozhraní vrstva – základní materiál. V tomto případě nelze pro odhad kritického napětí použít standardních postupů

---

\* Ing. Jakub Korbel: Technologické centrum, ABB s.r.o., Vídeňská 117, 619 00 Brno; tel: +420.547 152 048; e-mail: jakub.korbel@cz.abb.com

\*\* prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.: Ústav fyziky materiálů AV ČR, Žitkova 22, 616 62 Brno; tel: +420.532 290 358; e-mail: knesl@ipm.cz

lomové mechaniky a je nutno stanovit hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_I$ , která závisí na geometrii tělesa a trhliny, okrajových podmínkách a navíc i na rozdílu materiálových parametrů vrstvy a základního materiálu. Stanovení hodnoty  $H_I$  představuje v toto případě poměrně složitou výpočetní operaci, vyžaduje určité zkušenosti.  $H_I$  se obvykle se určuje numericky pomocí metody konečných prvků, např. Owen (1983) nebo Qian (2001).

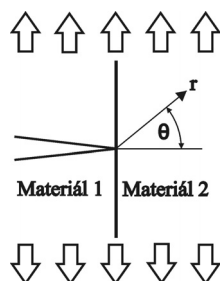
V příspěvku je na základě výpočtů metodou konečných prvků odvozen aproximativní vztah pro hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_I$  v případě tělesa s tenkou povrchovou vrstvou. Při výpočtu je předpokládána ideální adheze mezi povrchovou vrstvou a podkladem.  $H_I$  je vyjádřeno jako funkce poměru  $E_1/E_2$  Youngových modulů povrchové vrstvy ( $E_1$ ) a základního materiálu ( $E_2$ ). Aplikace tohoto výrazu umožňuje snadný odhad kritického napětí pro porušení tělesa s ochrannou povrchovou vrstvou a přispívá ke spolehlivějšímu odhadu životnosti konstrukcí s ochranou povrchovou vrstvou.

## 2. Trhlina s vrcholem na rozhraní dvou materiálů

V případě trhliny v homogenním prostředí je rozložení napětí v blízkosti jejího vrcholu popsáno rovnicí typu

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2)$$

kde  $K_I$  je faktor intenzity napětí (předpokládáme normálové namáhání),  $r$  je vzdálenost od vrcholu trhliny a  $\theta$  velikost polárního úhlu, viz obr.1. Napětí má vzhledem ke vzdálenosti od vrcholu trhliny  $r$  singulární charakter typu  $r^{-1/2}$ . Exponent singularity napětí je roven  $1/2$  rozměr faktoru intenzity napětí je  $MPa m^{1/2}$ . Kritická veličina faktoru intenzity napětí je lomová houževnatost,  $K_{IC}$ , a kritérium stability má tvar ( $\sigma_{appl}$  je aplikované namáhání,  $a$  je délka trhliny)



Obr. 1 Trhlina s vrcholem na rozhraní dvou materiálů a použité označení

$$K_I(\sigma_{appl} a) < K_{IC} \quad (3)$$

V případě trhliny s vrcholem na rozhraní, již pro rozdělení napětí neplatí vztah (2), dochází ke změně charakteru singularity a pro rozdělení napětí platí (pro jednoduchost opět předpokládáme trhlinu kolmou na rozhraní a normálový mód namáhání)

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} F_{ij}(\theta, \alpha, \beta) r^{-p} \quad (4)$$

kde  $F_{ij}$  je známá funkce polárního úhlu  $\theta$  a materiálových parametrů povrchové vrstvy a podkladu ( $\alpha, \beta$  jsou kompozitní parametry uvažovaných materiálů) a veličina  $H_I$  je zobecněný faktor intenzity napětí. Na rozdíl od trhliny v homogenním prostředí je v tomto případě singularita napětí typu  $r^{-p}$ , kde  $0 < p < 1$  je exponent singularity, např. Zak (1963) nebo Meguid (1995). V případě trhliny v homogenním tělese platí  $H_I = K_I$ . Hodnota exponentu

singularity  $p = p(\alpha, \beta)$  závisí na materiálových konstantách obou materiálů, viz Lin (1976) pro podrobnosti. Podobně jako faktor intenzity napětí  $K_I$ , je i hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_I$  funkcí aplikovaného napětí, geometrie tělesa, okrajových podmínek a navíc i materiálových parametrů obou komponent. Veličinu  $H_I$  lze učit buď přímou metodou, např. Owen (1983), nebo pomocí integrálního přístupu, např. Qian (2001). Skutečnost, že exponent singularity napětí  $p \neq 1/2$  znamená, že pro popis chování trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů nelze použít postupy a kritéria standardní lomové mechaniky např. Knésl (1991). Výpočet hodnot zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_I$  pro danou konfiguraci a kombinaci materiálů je klíčový a znalost hodnot  $H_I$  umožňuje stanovení kritického napětí pro šíření trhliny z rozhraní do podkladu Knésl (1998).

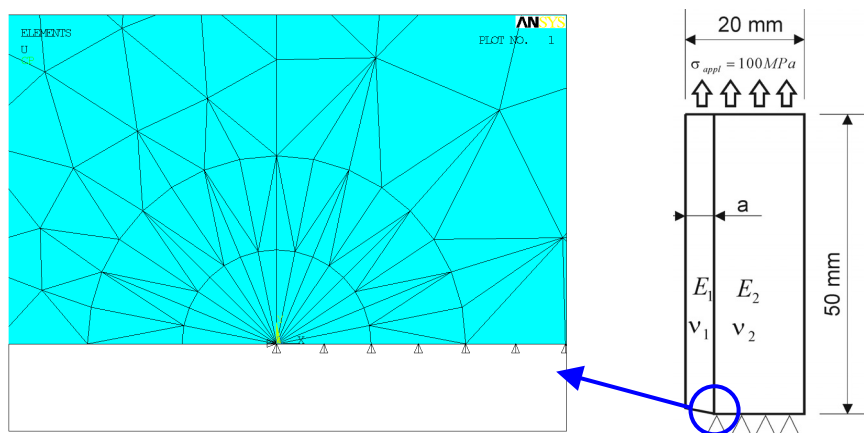
### 3. Numerický model a výsledky

Pro výpočet zobecněného faktoru intenzity napětí byla použita přímá metoda, která je založena na porovnání numericky a analyticky vypočtených hodnot napětí v těsné blízkosti kořene trhliny. Numerické výpočty byly provedeny v komerčně dostupném konečnoprvkovém systému ANSYS.

#### 3.1 Numerický model

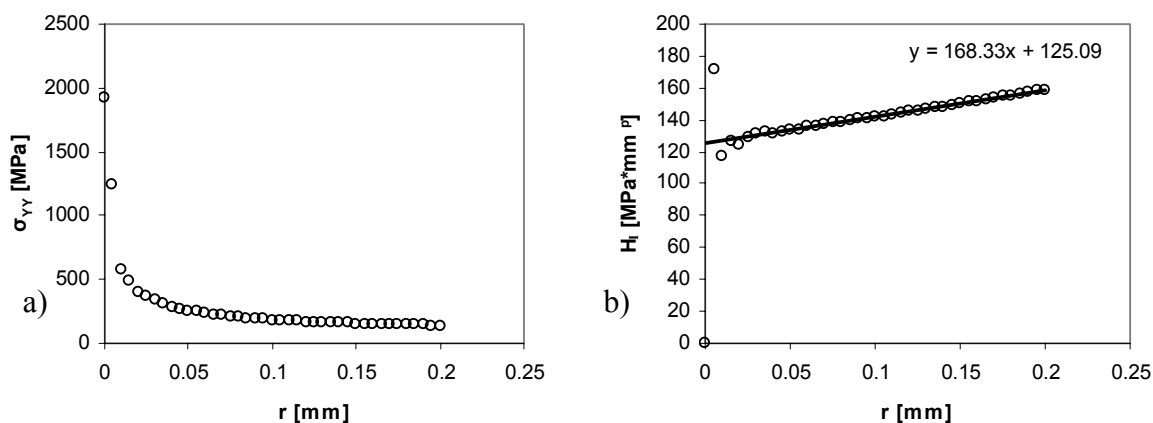
Pro výpočet byl použit vzorek podle obr.2. Povrchová vrstva tloušťky  $t = 0,1\text{mm}, 0,25\text{mm}$  a  $0,50\text{mm}$  reprezentuje ochranný povlak na masivním podkladu (celková tloušťka tělesa byly vždy  $T = 20\text{mm}$ ). Mezi vrstvou a podkladem předpokládáme ideální adhezi. Dále předpokládáme existenci apriorní povrchové trhliny ve vrstvě. Trhlina má vrchol na rozhraní obou složek, tj. délka trhliny je vždy  $a = t$ . Z důvodů symetrie je modelována polovina vzorku, viz obr.2. Vzorek je namáhán aplikovaným napětím  $100\text{MPa}$ , které působí rovnoběžně s rozhraním. Trhlina je tedy namáhána normálovým módem a základní lomově-mechanický parametr pro tuto konfiguraci je hodnota zobecněného součinitele intenzity napětí  $H_I$  (v případě homogenního tělesa  $K_I$ ).

Model byl tvořen průměrně 26800 elementy a detailní znázornění sítě v místě kořene trhliny je zobrazeno na obrázku 2. Pro modelování trhliny byl použit trojúhelníkový šestiuzlový prvek s uspořádáním do „růžice“ (poloměr růžice  $r = 0,01\text{mm}$ ) se středem ve vrcholu trhliny, viz obr.2.



Obr. 2 – Model a rozložení elementů u kořene trhliny

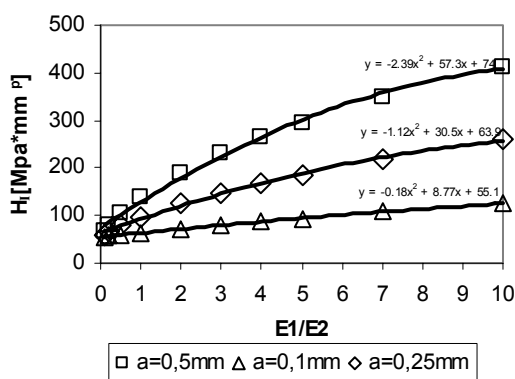
Výpočet přímou metodou vychází se stanovení napětí v podkladu v okolí vrcholu trhliny a srovnání této hodnoty s odpovídajícím analytickým výrazem. Typický výsledek rozložení složky napětí  $\sigma_{yy}$  (osa  $y$  je orientována kolmo na rozhraní) v závislosti na vzdálenosti  $r$  od vrcholu trhliny ve směru kolmém k rozhraní (tj.  $\theta = 0$ ) je uveden na obr.3a. Z vypočteného napětí  $\sigma_{yy}(r)$  byl následně stanoven zobecněný součinitel napětí  $H_I$  pomocí vztahu (4). V dostatečné vzdálenosti od kořene trhliny se extrapolací lineární části závislosti  $H_I = H_I(r)$  na hodnotu  $r = 0$  určí velikost smluvní hodnoty  $H_I$ , viz obr.3b. Tento postup je nutné opakovat pro různé poměry tuhosti ochranných vrstev a matrice.



Obr. 3 –a) Normálové napětí od kořene trhliny, b) Zobecněný součinitel intenzity napětí,  $E_1/E_2=2$ ,  $a=0,25\text{mm}$

### 3.2 Výsledky

Výsledky vypočtených hodnot  $H_I$  pro různé tloušťky povrchové vrstvy jsou uvedeny na obrázku 4. Pro přesnější nalezení vztahu vyjadřující závislost  $H_I$  na poměru Youngových modulů vrstvy a matrice byly vypočtené hodnoty rozděleny do dvou intervalů, tj. pro  $E_1/E_2 < 1$  a  $E_1/E_2 > 1$ . Následným normováním veličiny  $H_I$  veličinou  $\sigma_{appl} a^p$ , kde  $a$  je tloušťka povrchové vrstvy a  $p$  exponent singularity napětí (obr. 6) získáme rovnice ze kterých lze stanovit aproximativně velikost  $H_I$  i pro jiné hodnoty délky trhliny a zatížení, (rovnice 5 a 6).



Obr. 4 – Zobecněný součinitel intenzity napětí  $H_I$  pro různé tloušťky vrstev  $t$ .

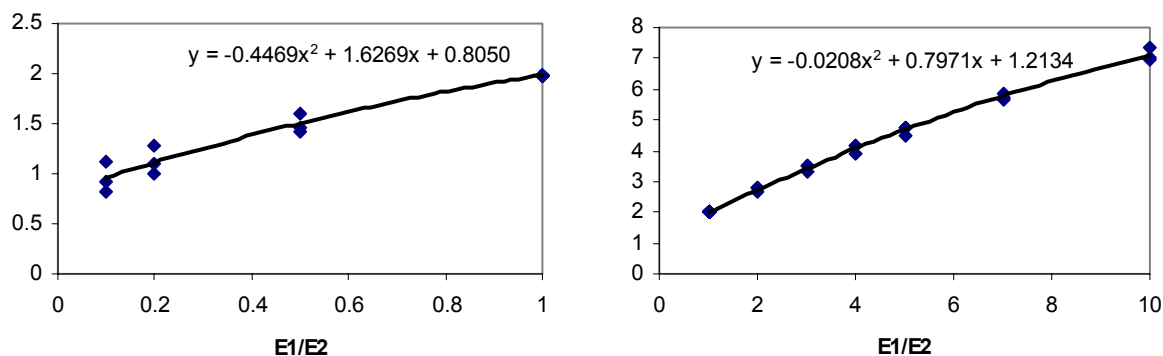
Velikost  $H_I$  lze tedy stanovit pro zadané aplikované napětí  $\sigma_{appl}$ , poměr elastických parametrů  $E_1/E_2$  a tloušťku povrchové vrstvy  $t = a$  následovně:

pro  $E_1/E_2 < 1$ :

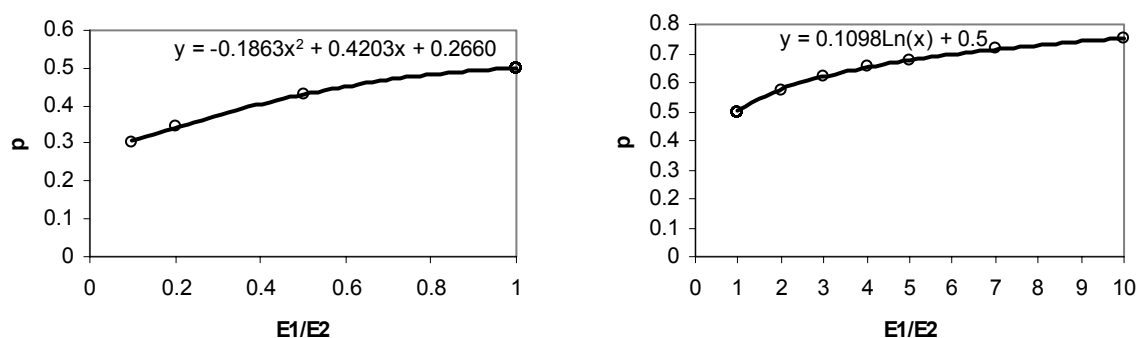
$$H_I = (-0.4469 \cdot (E_1/E_2)^2 + 1.6269 \cdot E_1/E_2 + 0.8050) \cdot a^{-0.1863 \cdot (E_1/E_2)^2 + 0.4203 \cdot E_1/E_2 + 0.2660} \cdot \sigma_{appl} \quad (5)$$

a pro  $E_1/E_2 > 1$ :

$$H_I = (-0.0208 \cdot (E_1/E_2)^2 + 0.7971 \cdot E_1/E_2 + 1.2134) \cdot a^{0.1098 \ln(E_1/E_2) + 0.5} \cdot \sigma_{appl} \quad (6)$$



Obr. 5 – Rovnice vyjadřující závislost bezrozměrné normované hodnoty  $H_I$  na poměru Youngových modulů v intervalech  $E_1/E_2 < 1$  a  $E_1/E_2 > 1$ .



Obr. 6 – Exponent singularity napětí

Poznamenejme, že rozměr veličiny  $H_I$  ve vztazích (5,6) je odvozen od rozměrů veličin aplikovaného napětí  $\sigma_{appl}$  a délky trhliny  $a$ . Pro běžně užívané materiály s poměrem  $0,5 < E_1/E_2 < 2,0$  je maximální odchylka aproximativně určených hodnot veličiny  $H_I$  od numericky určených hodnot menší než 5%.

#### 4. Diskuse

V klasické lineární elastické lomové mechanice je v případě křehkého porušení bezpečnost konstrukce často posuzována pomocí kritérií stability, která jsou založena na srovnání aktuální hodnoty  $K_I$  a kritické hodnoty  $K_{IC}$  (lomové houževnatosti), viz vztah (3). Analogicky lze formulovat kritérium stability i v případě trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů ve tvaru, např. Knésl et al. (2005),

$$H_I(\sigma_{appl}) < H_{IC}(K_{IC}) \quad (7)$$

kde  $H_{IC}$  je kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí, vyjádřená jako funkce lomové houževnatosti  $K_{IC}$  materiálu, do kterého se trhlina šíří. Závislost  $H_{IC} = H_{IC}(K_{IC})$  lze určit na základě srovnání lomově-mechanické veličiny  $L$ , která má jasně definovaný fyzikální význam jak v případě trhliny v homogenním prostředí, tak i v případě trhliny s vrcholem na rozhraní. Kritická hodnota zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_{IC}$  však nemá vhodnou vypovídající schopnost (všimněme se, že rozměr této veličiny je  $MPa m^p$  a závisí na velikosti exponentu singularity  $p$ ) a proto se většinou stanovuje hodnota kritického napětí  $\sigma_{crit}$  pro další šíření trhliny s rozhraní do podkladu a kritérium stability se zapisuje ve tvaru

$$\sigma_{appl} < \sigma_{crit}(K_{IC}) \quad (8)$$

Pro výpočet kritického napětí  $\sigma_{crit}$  je tedy nejprve nutno určit kritickou hodnotu zobecněného FIN  $H_{IC}(\sigma_{appl})$ , např. Knésl et al. (2005). Kritické napětí při kterém se začne trhlina šířit z rozhraní do podkladu je pak dáno vztahem

$$\sigma_{crit} = \sigma_{appl} \frac{H_{IC}}{H_I(\sigma_{appl})} \quad (9)$$

kde  $H_I(\sigma_{appl})$  odpovídá hodnotě zobecněného faktoru intenzity napětí určeného pro aplikované napětí  $\sigma_{appl}$ . Pro známou hodnotu  $H_{IC}$  se pak  $\sigma_{crit}$  určí ze vztahu (9), kde  $H_I(\sigma_{appl})$  je dáno vztahem (5,6). Přesnost odhadů kritického napětí na základě vztahů (9) a (5,6) je určena chybou aproximace výrazu pro  $H_I$ .

## 5. Závěr

V příspěvku byly odvozeny aproximativní výrazy pro hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí  $H_I$  pro případ trhliny v povrchové vrstvě. Aplikace těchto výrazů umožňuje snadný odhad kritického napětí pro porušení tělesa s ochrannou povrchovou vrstvou a přispívá ke spolehlivějšímu odhadu životnosti konstrukcí s ochranou povrchovou vrstvou.

## 6. Poděkování

Práce byla realizována za finanční podpory grantů 101/05/0320 a 101/05/0227 GA ČR.

## 7. Literatura

- Benthem, J.P., Koiter, W.T. (1973) Asymptotic approximations to crack problems. In: G.S. Sih, Editor, Methods of analysis and solutions of crack problems, *Mechanics of fracture, Vol.1*, pp,131-178, Noordhoff Internal Publishing.
- Broek, D. (1988) Elementary Engineering Fracture Mechanics. Fourth Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fenner, D.N. (1976) Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. *International Journal of Fracture*, 12(5), pp. 705-721.
- Chiang, C.R. (1991) On the stress intensity factors of cracks near an interface between two media. *International Journal of Fracture*, 47, pp. 55-58.

- Knésl, Z. (1991): A criterion of V-notch stability, *International Journal of Fracture* 48: R79 – R83.
- Knésl, Z., Knápek, A., & Bednář, K. (1998) Evaluation of the Critical Stress in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface. In: *Surface Modification Technologies*, 11, pp. 153-159.
- Knésl, Z., Klusák, J., Náhlík, L. (2005) Fracture mechanics parameters of general singular stress concentrators. In: International scientific conference held on the occasion of the 55th anniversary of founding the Faculty of Mechanical Engineering of the VSB – Technical University of Ostrava, Session 8 – Applied Mechanics, pp. 385-390, Ostrava.
- Lin, K., Y., & Mar, J., W. (1976) Finite element analysis of stress intensity factors for cracks at bi-material interface. *International Journal of Fracture*, 12(4), pp. 521-531.
- Meguid, S., A., Tan, M., & Zhu, Z., H. (1995) Analysis of cracks perpendicular to bimaterial interfaces using a novel finite element. *International Journal of Fracture*, 73, pp.1-23.
- Owen, D.R.J. – Fawkes, A.J. (1983) Numerical Methods and Applications. *Engineering Fracture Mechanics*: Pineridge Press Ltd, Swansea.
- Qian, Z.Q. (2001) On the evaluation of wedge corner stress intensity factors of bi-materials joints with surface tractions. *Computers and Structures*, 79, pp.53-64.
- Zak, A., R., Williams, M., L. (1963) Crack point stress singularities at a bi-material interface. *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, pp.142-143.