

ESTIMATION OF DENSITY FUNCTION PARAMETERS WITH CENSORED DATA FROM PRODUCT LIFE TESTS

J. Tůma *

Summary: *The paper deals with a statistical method for the evaluation of life test results. It is supposed that only some of the test specimens are observed until breaking while observation of others is terminated prior to breaking. That is, some observations are censored. The estimation of probability density function parameters is based on the maximum-likelihood method. The Weibull distribution function is preferably used to describe the complete life distribution. It is suggested that estimation be performed sequentially after each observed breakage treating specimens still on test as censored until the parameter estimates become stable. Some results of simulation are presented using an example of truck suspension tests.*

1. Úvod

Životnost určitého provedení výrobku představuje počet provozních hodin nebo počet ujetých kilometrů a nebo také počet sepnutí kontaktu spínače do poruchy nebo zničení. Zájem o statistické charakteristiky životnosti je dán potřebou stanovit záruky bezchybné funkce zařízení. V případě poruchy je vyžadována oprava a v případě zničení před uplynutím záruční lhůty zase náhrada škody, což představuje pro výrobce nebo prodejce vznik dodatečných nákladů. Data charakterizující životnost zařízení jsou dvojího druhu, a to buď údaje o době provozu do poruchy a nebo údaje o době provozu aniž by vznikla porucha. Z hlediska matematické statistiky i tento druh neurčitých dat o době provozu obsahuje užitečné informace, které mohou zpřesnit výpočet parametrů rozdělení doby provozu bez závad. Postup výpočtu je popsán například v příručce, která je k dispozici na webovských stránkách National Institute of Standards and Technology, USA (<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm>). Dále popisovaný postup se opírá o algoritmus, který byl vyvinut v podniku Tatra Kopřivnice (Tůma, 1989) a později publikován ve sborníku prací VŠB, Fakulta strojní (Tůma, 1996).

Individuální životnost konkrétního výrobku je náhodná veličina τ . Určitá (fixní) hodnota této náhodné veličiny bude značena písmenem t a bude představovat obecně rovněž životnost například ve významu doby provozu. U životnosti je třeba znát rozdělení pravděpodobnosti, které souvisí s pravděpodobností vzniku poruch. Například pravděpodobnost, že porucha vznikne v časovém intervalu od t do $t + \Delta t$, lze vyjádřit ve tvaru

* Prof. Ing. Jiří Tůma, CSc.: Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava; tel.: +420 59 699 3482, fax: +420 59 699 3482; e-mail: jiri.tuma@vsb.cz

$$P\{t \leq \tau < t + \Delta t\} = f(t; \Theta) \Delta t, \quad (1)$$

kde funkce $f(t; \Theta)$ je hustota rozdělení pravděpodobnosti se skupinou parametrů, které jsou symbolicky označeny Θ a které obecně představují vektor. Další charakteristika životnosti je distribuční funkce $F(t; \Theta)$, která souvisí s hustotou pravděpodobnosti podle následujícího vztahu

$$P\{\tau < t\} = F(t; \Theta) = \int_{-\infty}^t f(t; \Theta) dt. \quad (2)$$

Pravděpodobnost, že individuální životnost bude větší než doba provozu t , je dána vztahem

$$P\{\tau > t\} = 1 - F(t; \Theta) = \int_t^{+\infty} f(t; \Theta) dt. \quad (3)$$

Testy životnosti probíhají obvykle u souboru vzorků určitého výrobku najednou nebo postupně. Strategie zkoušení se může opírat o pravidlo, podle kterého se musí všechny zkoušené výrobky přivést provozem k poruše nebo zničení. Tento popis předpokládá, že zkoušky všech výrobků nemusí být vedeny až k poruše nebo zničení a že řada zkoušek bude přerušena bez vzniku poškození, tj. tyto zkoušky budou neukončeny. Výsledek testu představuje soubor o počtu n hodnot individuálních životností $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ (doby provozu do vzniku poruchy nebo poškození) a soubor o počtu m hodnot, které informují jen o skutečnosti, že některé výrobky vydržely test bez poruchy, tj. jejich individuální životnosti jsou minimálně rovny nebo větší než doby provozu $t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, \dots, t_{n+m}$. Zkouší se tedy celkem $n + m$ vzorků výrobku, přičemž jen u části z nich vznikne porucha. Takový soubor dat se nazývá cenzorovaný.

Výsledkem vyhodnocení souboru dat z testu životnosti jsou odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti, ze kterých lze vypočítat například střední hodnotu životnosti, rozptyl životnosti a hlavně kvantily, které stanovují jaký podíl výrobků má dosáhnout stanovenou životnost, což je údaj obvykle uváděný v technických podmínkách provozu výrobku. Cílem předloženého sdělení je popsat a zdůvodnit postup výpočtu zmíněných charakteristik.

2. Odhad parametrů rozdělení cenzorovaného statistického souboru

Parametry rozdělení pravděpodobnosti se odhadují několika způsoby (Hátle a Likeš, 1974). Nejvíce známý postup užívá metodu momentů, podle které se parametry odhadují na základě relací mezi těmito momenty a parametry rozdělení nebo tyto momenty, tj. střední hodnota, rozptyl, atd., jsou přímo parametry rozdělení jako například u normálního (Gaussova) rozdělení. Dalším způsobem odhadu parametrů je metoda maximální věrohodnosti. Tento způsob odhadování je zvláště vhodný pro cenzorovaná data, a proto bude k jejich vyhodnocení použit.

Zdůvodnění metody spočívá ve výpočtu pravděpodobnosti výskytu daného souboru změřených dat, jejichž jednotlivá měření představují nezávislé jevy (pokusy), proto

$$P_{\Sigma} = f(t_1, \Theta) \Delta t \dots f(t_n, \Theta) \Delta t \int_{t_{n+1}}^{+\infty} f(t; \Theta) dt \dots \int_{t_{n+m}}^{+\infty} f(t; \Theta) dt. \quad (4)$$

Tato pravděpodobnost je kromě změřených dat také funkcí vektoru parametrů Θ . V teorii pravděpodobnosti se definují maximálně věrohodné odhady parametrů tak, že maximalizují výše uvedenou pravděpodobnost P_{Σ} . Pomocí této pravděpodobnosti se definuje věrohodnostní funkce $L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n+m}; \Theta)$ vzorcem

$$P_{\Sigma} = L(t_1, t_2, \dots, t_{n+m}; \Theta)(\Delta t)^n, \quad (5)$$

tj. platí

$$L(t_1, \dots, t_{n+m}; \Theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \Theta) \prod_{i=n+1}^{n+m} \int_{t_i}^{+\infty} f(t; \Theta) dt. \quad (6)$$

Pro výpočty je vhodnější logaritmus věrohodnostní funkce

$$\ln L(t_1, \dots, t_{n+m}; \Theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(t_i; \Theta) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \ln \int_{t_i}^{+\infty} f(t; \Theta) dt. \quad (7)$$

3. Volba typu rozdělení pravděpodobnosti

Vznik poruch hodnoceného výrobku charakterizuje veličina, která je nazývána intenzita poruch $\lambda(t; \Theta)$. Tato veličina je funkcí doby provozu t a vektoru parametrů Θ . Definiční vztah je

$$P\{t \leq \tau < t + \Delta t\} = \lambda(t; \Theta) \Delta t P\{\tau > t\} + O(\Delta t), \quad (8)$$

kde $O(\Delta t)$ je řádově menší než Δt , tj. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t)/\Delta t = 0$. Z předchozí rovnice lze získat vztah

$$\lambda(t; \Theta) \Delta t = \frac{P\{t \leq \tau < t\} - O(\Delta t)}{P\{\tau > t\}}, \quad (9)$$

což je podmíněná pravděpodobnost výskytu poruchy při době provozu t až $t + \Delta t$, a to u výrobků s vyšší individuální životností než je doba provozu t . Po dělení předcházející rovnice veličinou Δt , které vztahuje tuto podmíněnou pravděpodobnost na jednotkový interval doby provozu a dává této pravděpodobnosti význam intenzity, a po limitním přechodu $\Delta t \rightarrow 0$ lze získat vzorec pro výpočet intenzity poruch ve tvaru (Maixner a Kolníková, 1984)

$$\lambda(t; \Theta) = \frac{f(t; \Theta)}{1 - F(t; \Theta)} = \frac{F'(t; \Theta)}{1 - F(t; \Theta)}. \quad (10)$$

Z posledního vzorce lze vytvořit vzhledem k neznámé funkci $F(t; \Theta)$ lineární diferenciální rovnici prvního řádu v nezávisle proměnné t . Řešení diferenciální rovnice s použitím metody variace koeficientů je následující

$$F(t; \Theta) = 1 + \exp \left[- \int_0^t \lambda(t; \Theta) dt \right]. \quad (11)$$

Poslední vzorec má obecný tvar. Pro další úvahy je třeba konkretizovat funkční závislost intenzity poruch na době provozu. Při analýze dat z testu životnosti se nejlépe osvědčilo Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti. Jestliže jsou všechny zkoušky ukončeny, pak je často použito logaritmicko-normální rozdělení.

Weibullovo rozdělení $W(c, \delta)$

Toto rozdělení má dva parametry s kladnými hodnotami, a proto $\Theta = \{c, \delta\}$. Intenzita poruch pro toto rozdělení je definována vztahem

$$\lambda(t; \{c, \delta\}) = \frac{c}{\delta} \left(\frac{t}{\delta} \right)^{c-1}. \quad (12)$$

Příslušná hustota rozdělení pravděpodobnosti a distribuční funkce pro $t > 0$ jsou

$$f(t; \{c, \delta\}) = \frac{c t^{c-1}}{\delta^c} \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta} \right)^c \right], \quad F(t; \{c, \delta\}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta} \right)^c \right]. \quad (13)$$

Pro čas $t \leq 0$ je $f(t; \{c, \delta\}) = 0$ a $F(t; \{c, \delta\}) = 0$. Střední hodnota $E\{\tau\}$ a rozptyl $\text{var}(\tau)$ jsou

$$E\{\tau\} = \delta \Gamma \left(\frac{1}{c} + 1 \right), \quad \text{var}(\tau) = \delta^2 \left[\Gamma \left(\frac{2}{c} + 1 \right) - \Gamma^2 \left(\frac{1}{c} + 1 \right) \right], \quad (14)$$

kde $\Gamma(m)$ je tzv. gama funkce

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} x^{m-1} \exp(-x) dx. \quad (15)$$

Kvantil t_p této hustoty pravděpodobnosti pro zvolenou pravděpodobnost P je

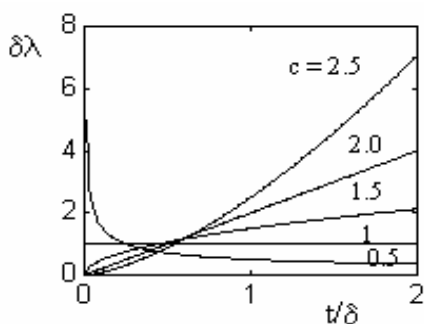
$$t_p = \delta \sqrt[c]{-\ln(1-P)}. \quad (16)$$

Speciální případy Weibullova rozdělení dané určitou hodnotou parametru c jsou následující:

- $c = 1$ exponenciální rozdělení
- $c = 2$ Rayleighovo rozdělení

Charakteristická je také závislost intenzity poruch na době provozu. Pro $c > 1$ intenzita poruch roste s dobou provozu, což lze spojovat s provozním opotřebením. Naproti tomu pro $c < 1$ intenzita poruch s dobou provozu klesá, protože na začátku provozu se vyřadí výrobky

se skrytými vadami. Jestliže $c = 1$ (výše zmíněné exponenciální rozdělení), pak intenzita poruch nezávisí na čase, a proto exponenciální rozdělení je označováno jako „bez paměti“. Příklad závislosti intenzity poruch na čase je uveden na obrázku 1.



Obrázek 1 Intenzita poruch u Weibullova rozdělení

U složitějšího zařízení s mnoha samostatně porouchatelnými a znovu opravitelnými komponentami, agregáty nebo jednotkami je při sledování intenzity poruch pozorovatelná závislost ve tvaru tzv. vanové křivky, která v počáteční fázi reprezentuje zvýšenou intenzitu výskytu skrytých vad, pak následuje období s vyrovnanou intenzitou poruch a při konci životnosti následuje vzrůst intenzity poruch vlivem opotřebením. Je třeba tedy

zdůraznit, že aproximace intenzity poruch vzorcem, který je odvozen z Weibullova rozdělení pravděpodobnosti, charakterizuje jen jednu ze zmíněných tří fází provozu zařízení.

Pro odhad parametrů rozdělení pravděpodobnosti je třeba určit nejprve logaritmus věrohodnostní funkce je

$$\ln(L) = n \ln\left(\frac{c}{\delta^c}\right) + (c-1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{\delta^c} \sum_{i=1}^{n+m} t_i^c. \quad (17)$$

Extrém této funkce lze vypočítat pomocí stacionárních bodů funkce $\ln(L)$, ve kterých jsou nulové derivace této funkce podle proměnných c a δ , což představuje soustavu rovnic

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial \ln(L)}{\partial c} = 0. \quad (18)$$

Explicitní vzorec však lze vypočítat pouze pro parametr δ

$$\delta = \sqrt[c]{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+m} t_i^c\right)}. \quad (19)$$

Naproti tomu parametr c lze určit numericky výpočtem extrému funkce $\ln(L)$ metodou jednoparametrové optimalizace. Mění se jen parametr c , zatímco δ se počítá z posledního vzorce.

Logaritmicko-normální rozdělení pravděpodobnosti

Toto rozdělení pravděpodobnosti má parametry $\Theta = \{\mu, \sigma\}$. Hustota rozdělení pravděpodobnosti a distribuční funkce pro $t > 0$ jsou

$$f(t; \{\mu, \sigma\}) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad F(t; \{\mu, \sigma\}) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \quad (20)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je obvykle tabelovaný integrál hustoty rozložení pravděpodobnosti. Střední hodnota a rozptyl jsou následující

$$E\{\tau\} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{var}(\tau) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]. \quad (21)$$

Kvantil této hustoty pravděpodobnosti je

$$t_p = \exp(\mu + \sigma u_p). \quad (22)$$

kde u_p je kvantil normálního rozdělení pro pravděpodobnost P . Logaritmus věrohodnostní funkce má následující tvar

$$\ln(L) = -n \ln(\sigma^2 \sqrt{2\pi}) - \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln(t_i) - \mu)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} \ln\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(t_i) - \mu}{\sigma}\right)\right]. \quad (23)$$

Maximálně věrohodné odhady maximalizují tuto funkci. Vzhledem ke způsobu definice funkce $\Phi(\cdot)$ nelze odvodit explicitní vzorce pro parametry $\Theta = \{\mu, \sigma\}$, a proto je nutné použít numerický výpočet.

4. Příklad

V příkladu je hodnocena životnost listových pružin u terénního nákladního automobilu při urychlených terénních zkouškách (Tůma, 1989). Součinitel urychlení zkoušek není v tomto příkladu podstatný. Výsledek zkoušek je pro výrobce automobilu velmi důležitý, protože listové pružiny v systému pérování vozidla jsou vědomě dimenzovány pro konečnou životnost, kterou je třeba sladit s garantovanou životností celého vozidla. Životnost je vyjádřena v proběhu kilometrů do vzniku lomu prvního listu pružiny a u neukončených zkoušek počet ujetých kilometrů. Ve statistickém souboru je 25 výsledků zkoušek, z toho je 18 ukončených a 7 neukončených. Rozdělení pravděpodobnosti proběhů je aproximováno Weibullovým rozdělením. Tabulka 1 obsahuje postupné odhady parametrů Weibullova rozdělení v souladu s nárůstem počtu ujetých kilometrů.

Tabulka 1

Pořadí	Proběh 10 ³ km	Lom (L) Neukonč.(N)	c	δ 10 ³ km	stř.hodnota 10 ³ km	směr.odch. 10 ³ km
1.	16	L	-	-	-	-
2.	23	L	5.7	35.6	32.9	6.6
3.	24	L	6,9	32.4	30.3	5.2
4.	27	L	5.3	37.6	34.6	7.5
5.	35	L	3.0	57.6	51.3	18.6
6.	41	L	2.5	68.5	60.8	26.0
7.	59	L	1.60	116.7	104.6	66.8
8.	64	L	1.64	113.5	101.5	63.6
9-10.	75	L	1.69	111.7	99.7	60.6
11.	79	L	1.74	108.6	96.8	57.3
12.	82	L	1.81	104.8	93.2	53.2
13.	91	L	1.73	109.4	97.5	58.1
14-15.	95	L	1.90	102.0	90.5	49.5
16.	112	L	1.71	-	-	-
17.	112	N	1.71	110.6	98.7	59.4
18-19.	126	N	1.54	119.5	107.5	71.2
20-21.	134	N	1.48	123.3	111.5	76.6
22.	137	L	1.60	118.2	106.0	67.7
23.	139	L	1.66	114.0	101.9	63.0
24.	140	N	1.65	114.3	102.2	63.6
25.	145	N	1.64	114.6	102..5	64.2

Odhad parametrů při každém lomu předpokládá, že ostatní zkoušky jsou neukončeny s proběhem daným počtem kilometrů shodným s proběhem příslušným k tomuto lomu. Konečné odhady parametrů odpovídají stavu z posledního řádku předcházející tabulky, tj. $c = 1,64$, $\delta = 114,6$ tis. km. Odhad střední hodnoty je 102,5 tis. km a směrodatné odchylky 64,2 tis. km. Z postupného výpočtu je zřejmé, že statistické odhady parametrů se téměř ustálí při proběhu kolem 60 až 80 tis. km a porušení jen 8 pružin. Postupné odhady jsou znázorněny rovněž v obrázcích 2 a 3. V obrázku 2 je znázorněna závislost na pořadí vzniku poruch a v obrázku 3 na počtu ujetých kilometrů do lomu listových pružin. Oba obrázky dávají užitečné informace o volbě okamžiku, kdy je výhodné zkoušku zastavit.

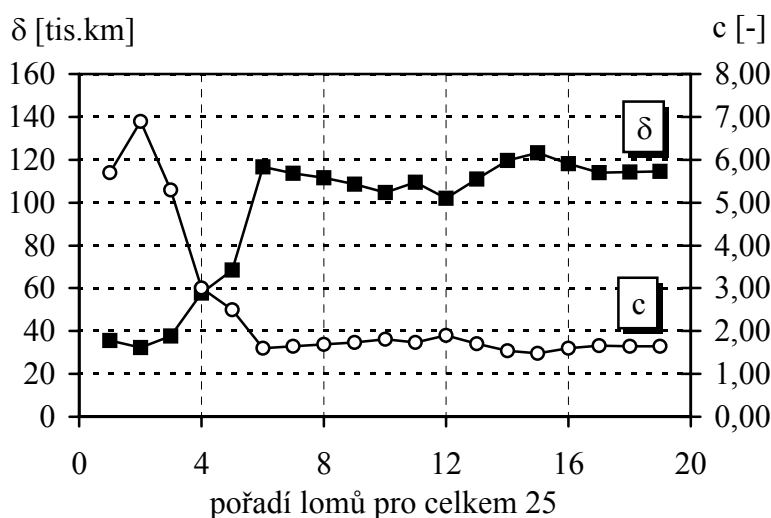
Kvantily rozdělení na konci testu jsou shrnuty v tabulce 2.

Tabulka 2

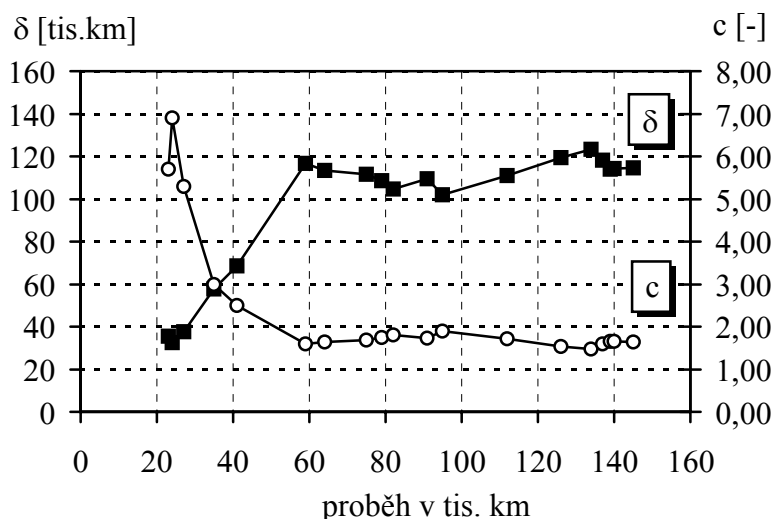
Pravděpodobnost %	1	5	10	50	90	95	99
Proběh v tis.km	6.9	18.7	29.1	91.6	190.6	223.7	290.8

Tato tabulka uvádí, že např. 10 % pružin se poruší již při proběhu 29.1 tis.km, což se může jevit ve srovnání s garantovanou životností automobilu více než 500 tis.km velmi málo. Prezentovaná data, jak bylo uvedeno, přísluší urychlené zkoušce.

Na obrázku 4 je závislost empirické a teoretické intenzity poruch na proběhu (doba provozu). Teoretická křivka byla vypočtena pro výše uvedené odhady parametrů Weibullova rozdělení pravděpodobnosti. Empirická intenzita byla vypočtena pro intervaly o délce $\Delta t =$



Obrázek 2 Postupné odhady parametrů Weibullova rozdělení



Obrázek 3 Postupné odhady parametrů Weibullova rozdělení

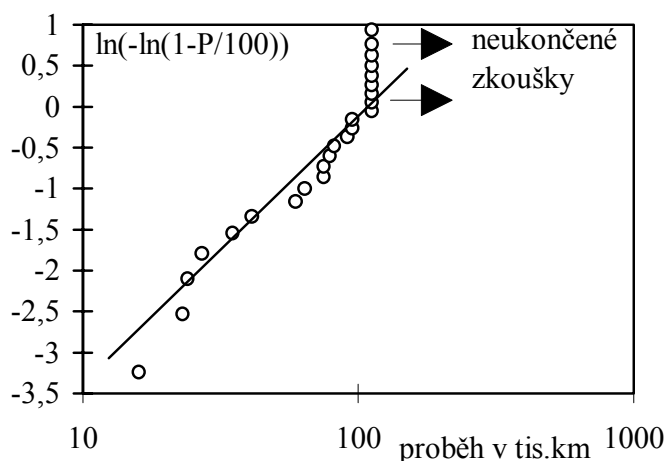
20 tis. km, a to tak, že se jedná o podíl počtu poruch k celkovému počtu pružin v provozu na začátku hodnoceného intervalu. Tato relativní četnost byla dále podělena délkou intervalu Δt . Empirická intenzita poruch sleduje teoretickou intenzitu jen do proběhu 90 tis. km. V intervalech se středními proběhy 110 a 130 tis. km jsou empirické hodnoty vzdáleny teoretické intenzitě. Důvodem je zmenšený počet neporušených pružin v závěru testu, což ovlivňuje výpočet relativních četností.

Podíl ukončených zkoušek v uvedeném příkladu lze konfrontovat s příkladem z literatury (Kropáč, 1987). U zkoušky ložisek je předepsáno, aby byla zastavena při poruše prvních 3 ložisek ze skupiny 30 současně zkoušených vzorků, což se jeví podle uvedeného příkladu nedostatečné.

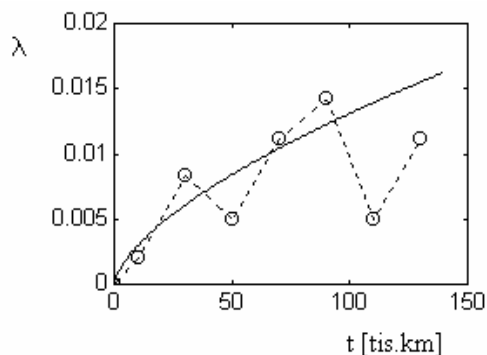
Kromě popsaného analytického postupu odhadu parametrů rozdělení pravděpodobnosti je možné využít grafické metody, při které je použito speciálního měřítka pro graf distribuční funkce. Toto měřítko transformuje distribuční funkci Weibullova rozdělení na přímku tak, aby bylo možné snadno (rovněž přímkou) aproximovat empirickou distribuční funkci. Transformační vztahy lze získat z distribuční funkce Weibullova rozdělení dvojitým logaritmováním

$$\ln(-\ln(1-F(t))) = c(\ln(t) - \ln(\delta)).$$

Vodorovná osa v tomto grafu má logaritmické měřítko pro proměnnou t a svislá osa se transformuje podle vzorce $\ln(-\ln(1-P/100))$, kde P je pravděpodobnost v procentech, na lineární měřítko. Sklon aproximační přímky souvisí s parametrem c a její posunutí s parametrem δ . Tento postup však vyžaduje, aby ukončené zkoušky měly menší dobu provozu než neukončené zkoušky. V obrázku 5 jsou znázorněny výsledky pro předpoklad, že posledních 9 zkoušek je neukončených. Jestliže budou parametry rozdělení odhadovány



Obrázek 5 Grafická metoda odhadu parametrů Weibullova rozdělení (P je pravděpodobnost v %)



Obrázek 4 Teoretická a empirická intenzita poruch

pouze z prvních tří měření, pak zřejmě oba parametry budou určeny velmi nepřesně jak je zřejmé z obrázků 2 a 3. Protože poloha aproximační přímky pro prvé tři body grafu pro pravděpodobnosti 1%, 5% a popřípadě i 10% je téměř shodná s přímkou pro odhady z 16 ukončených zkoušek, odhady kvantilů pro pravděpodobnosti 1%, 5% a 10% se nebudou lišit od hodnot přesných, avšak kvantily pro pravděpodobnosti 90%, 95% a 99% budou zcela chybné.

5. Závěr

Odhad parametrů rozdělení pravděpodobnosti cenzorovaných souborů, který je popsán v tomto referátu, je pro libovolné relace mezi výsledky ukončených a neukončených testů životnosti výrobků. Na rozdíl od grafické metody nemusí mít neukončené zkoušky delší dobu provozu než zkoušky ukončené poruchou nebo zničením vzorku. Z aproximované závislosti intenzity poruch na době provozu lze stanovit kvantily rozdělení pravděpodobnosti, které stanovují dobu bezporuchového provozu pro povolený podíl poruch, resp. zničení výrobku nebo součástky. Tento údaj je nejčastěji používanou statistickou charakteristikou pro technické podmínky provozu výrobku dojednané mezi dodavatelem a odběratelem.

V příkladu je demonstrováno, že průběh a ustálení parametrů rozdělení a statistických charakteristik lze průběžně monitorovat tak, aby zkoušky nebyly neúčelně prodlužovány. V daném příkladu je ustálení odhadu dosaženo při poruše třetiny zkoušených vzorků pružin.

6. Poděkování

Výzkumné práce v oboru zpracování měření hluku a vibrací jsou podporovány Grantovou agenturou České republiky jako projekt č. 101/04/1530.

7. Literatura

Engineering statistic Handbook <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm>.

Tůma, J. Rozbor způsobu vyhodnocování souboru ukončených a neukončených zkoušek pro stanovení životnosti dílů a agregátů, Technická zpráva TATRA Kopřivnice č.18.00.000-229, 1989.

Tůma, J. Odhad parametrů rozdělení cenzorovaných dat z testů životnosti výrobků. Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, řada strojní, 1996, roč. XLII, č. 1, článek 1168. ISSN 1210-0471.

Hátle, J. & Likeš, J. Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, SNTL/ALFA. Praha 1974.

Maixner, L. & Kolníková, Z. Spolehlivost automatických výrobních systémů. SNTL Praha 1984.

Kropáč, O. Náhodné jevy v mechanických soustavách, SNTL TKI, Praha 1987.