



REDUCED PROBLEM OF NON-LINEAR AEROELASTIC STABILITY AND RELEVANT POST-CRITICAL STATES

S. Pospíšil, J. Náprstek *

Summary: *Long slender civil-engineering structures exposed to wind, especially decks of suspension bridges, their supporting elements, masts, towers and tall buildings are susceptible to vibrations under certain circumstances due to wind load action or due to special aeroelastic effects. Interaction between structural response and wind load, having the influence on the stability, is nowadays of basic importance in advanced technical design of such structures. Finding the stationary points and determining stability characteristics of a system is an important undertaking in any attempt to understand or to modify its dynamical properties. The importance can be understood and demonstrated with an example describing the aeroelastic system with gyroscopic as well as with non-conservative terms. We consider a non-linear system with two degrees of freedom representing an interaction of bending and torsion of a slender beam vibrating in a cross flow. The cross-section shape makes possible to separate principal effects and the coupling of aeroelastic modes is caused solely by the flow around the structure. The system is auto-parametric and permits a semi-trivial solution of two types, one of which being unstable. Apart from that the response may be non-trivial in both phase coordinates. Conditions of existence of stationary points and their types are investigated using primarily the Lyapunov function. The procedure presented is applicable for Hamiltonian holonomic systems which are conservative, or non-conservative with certain limitations on the generalised forces. The singular points are classified with respect to their asymptotically stable/unstable character together with adequate physical interpretation. Attention is paid to attractive and repulsive areas surrounding these points. Using this background several types of post-critical response in non-linear formulation will be presented, such as stable/unstable limit cycles with various ratio of amplitudes of both components, or quasi-periodic response processes having a form of symmetric or asymmetric beating effects with strong energy trans-flux between degrees of freedom.*

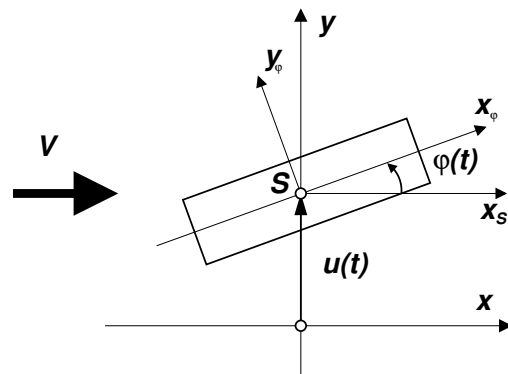
1. Úvod

Základní úkol při aeroelastickém návrhu mostu spočívá ve formulaci interakce samobuzených sil s odezvou konstrukce. Z teoretického hlediska vede tato interakce ke vzniku nekonzervativních, respektive gyroskopických sil, které ovlivňují členy matice tuhosti, respektive matice útlumu soustavy a mohou být příčinou ztráty stability této konstrukce. Interní mechanismus

* Ing. Stanislav Pospíšil, Ph.D., Ing. Jiří Náprstek, DrSc.,
Institute of Theoretical and Applied Mechanics ASCR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
pospilis@itam.cas.cz, naprstek@itam.cas.cz

samobuzeného kmitání je silně ovlivněn nelinearitami rozličné úrovně. Na lineární úrovni, jako speciálního případu úrovně nelinearity prvního řádu, lze formulovat dvě paralelní větve analýzy samobuzených sil. Jedná se o duální přístupy v časové a frekvenční oblasti, z nichž každá poskytuje určité výhody, viz Caracoglia (2003). Aeroelastický problém zahrnující modelování aerodynamických sil vzniklých v náhodném nestacionárním proudu vzduchu s uvažováním nelinearit je shrnut v publikaci Chen (2003). Pro praktickou potřebu přímého stanovení kritické rychlosti se používá modelu s kombinovaným časově-frekvenčním zápisem i přes to, že ke kvantitativnímu vyhodnocení je nutné použít iterativních metod výpočtu. Z matematického hlediska jsou však tyto modely silně problematické, neboť zahrnují mnoho předpokladů, které nemohou být splněny již například v případě, že odezva ztratí čistě harmonický charakter s jednoznačně „viditelnou“ frekvencí, viz Náprstek (2000).

Kromě toho tato analýza ukázala značnou pestrost závěrů získaných z terminologické nejednoznačnosti a experimentů. Tato jistá roztržitost má zřejmě historické důvody. Problematikou aeroelasticity se zabývala řada oborů bez významnější vzájemné komunikace. Každý z nich se pohyboval v jiné oblasti parametrů, a tudíž zdůrazňoval jiné přístupy k problematice, k jejím individuálním větvím a také k mnoha různým oblastem nestability a bifurkačních bodů. V průběhu let došlo samozřejmě k pochopení nejdůležitějších charakteristik aeroelastického systému. Ačkoliv některé z těchto přístupů umožňují na jedné straně předpovědět spodní meze ztráty aeroelastické stability, nedovolují analýzu postkritického chování se silně nelineárním charakterem, které je z hlediska možné restabilizace systému rozhodující. Jedním z dalších důležitých hledisek je skutečnost spočívající v možnosti vzniku autoparametrické resonance, viz Tondl (1997), zvláště s ohledem na možnou nelineární restabilizaci. Všechny tyto jevy jsou vysoce nebezpečné především s ohledem na degradaci konstrukčních vlastností, neboť ústí do postkritické odezvy obsahující zpravidla superharmonické složky. V některých případech se takové konstrukce mohou chovat jako selektivní rezonátory. Na druhé straně některé nelineární efekty, které vznikají z těchto interakcí, mohou působit jako stabilizační faktory. Jsou způsobilé, alespoň po určitou dobu, obnovit některý z nižších typů nestability poté, co konstrukce ztratila svou exponenciální nebo asymptotickou stabilitu, Tondl (1999). Několik speciálních jevů, které vycházejí z existence parametrických šumů a nesymetrie matice tuhosti a matice útlumu, bylo velmi úspěšně teoreticky popsáno například v publikaci Náprstek (2001).



Obr. 1. Schematický obrázek modelu se dvěma stupni volnosti v proudu vzduchu.

Vedle čistého analytického přístupu existuje ve světové literatuře velký počet experimentálních prací, které se vztahují k tématu, viz např. Ricciardelli (2002). Každá z uvedených vědeckých větví vytvořila svou vlastní experimentální základnu danou okamžitou potřebou s důrazem na typickou množinu parametrů. Není proto v konečném důsledku zřejmé, který z parametrů je z hlediska ztráty stability rozhodující a který se vztahuje jen k speciálnímu případu. Nejasná role jednotlivých parametrů systému při ztrátě stability tak vede k potřebě systematického studia, založeného na vývoji jednotného teoretického i experimentálního přístupu, pokrývajícího jak známé případy ztráty aeroelastické stability (galloping, flutter), tak i restabilizační a repulsivní

chování způsobené nelineárními a nesymetrickými částmi modelu.

Předkládaný obecný matematický model popisuje vertikální a torzní vibrace prismatického nosníku podle obr. 1, který je obtékán proudem vzduchu podél své delší strany. Využijme skutečnosti, že nosník je symetrický vzhledem ke svým dvěma osám a střed kroucení je identický s těžištěm obrazce. Výslednice aerodynamických sil tak působí v tomto středu obrazce. Provázání aeroelastických tvarů je tudíž způsobeno výhradně prouděním a oscilacemi v ohybu a kroucení, které vytvářejí časově proměnný zdvih $L(t)$ a moment $M(t)$. Problematika stanovení aeroelastických sil, či koeficientů, je probírána do značných detailů v mnoha monografiích, nově viz. např. Strømme (2006). Vztah mezi silami a proudem vzduchu je však většinou popsán lineárními vztahy. Aerodynamické součinitele, které jsou původem aeroelastických interakcí, se vyjadřují jako funkce tzv. redukované frekvence $\kappa = d \cdot \omega / V$, což respektuje skutečnost vycházející z fyzikální podstaty, že se nejedná o statické hodnoty, nýbrž že své hodnoty s frekvencí mění. Například zdvižná síla v případě čistě harmonického pohybu s nízkou, respektive vysokou frekvencí bude mít zcela rozdílnou amplitudu. Z matematického hlediska je tedy takový koncept přijatelný pouze v případech, kdy je odezva systému čistě harmonická.

Dynamickou odezvu štíhlého prutu s proporcionálním útlumem můžeme formulovat jako časově lineární kombinaci vlastních tvarů. Vzhledem k ortogonalitě jsou vlastní tvary vzájemně nezávislé v deterministické oblasti. Pokud netvoří vlastní frekvence shluky a jsou mezi nimi dostatečně rozdíly, je možné vyslovit domněnku, že odezva konstrukce může být dostatečně popsána pomocí několika málo prvních vlastních tvarů. Je-li rozdíl mezi první vlastní frekvencí v ohybu a v kroucení nízký, lze vyvodit z praktických pozorování a energetických rozborů, že kmitání známé jako flutter lze obvykle uvažovat jako kmitání složené ze samostatných oscilačních tvarů bez vlivu tvarů ostatních. S ohledem na kvalitativní analýzu skutečného nosníku je možné v takovém případě vytvořit matematický model se dvěma stupni volnosti. Matice tuhosti bude formulována tak, aby frekvence odpovídaly vlastním frekvencím původního nosníku.

K popisu chování nosníku volíme následující obecný zápis složený ze dvou diferenciálních rovnic, viz Náprstek (2007):

$$\ddot{u} - 2\omega_{bu}\dot{u} + \omega_u^2 u = K_m(1 - \gamma_{uu}\dot{u}^2 - \gamma_{u\varphi}\dot{\varphi}^2)(b_{uu}\dot{u} + b_{u\varphi}\dot{\varphi}) + K_m(1 - \beta_{uu}u^2 - \beta_{u\varphi}\varphi^2)(c_{uu}u + c_{u\varphi}\varphi) \quad (a) \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} - 2\omega_{b\varphi}\dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = K_J(1 - \gamma_{\varphi u}\dot{u}^2 - \gamma_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2)(-b_{\varphi u}\dot{u} + b_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}) + K_J(1 - \beta_{\varphi u}u^2 - \beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)(-c_{\varphi u}u + c_{\varphi\varphi}\varphi) \quad (b)$$

nebo alternativně:

$$\ddot{u} - 2\omega_{bu}\dot{u} + \omega_u^2 u = K_m(1 - \beta_{uu}u^2 - \beta_{u\varphi}\varphi^2)(c_{uu}u + c_{u\varphi}\varphi + b_{uu}\dot{u} + b_{u\varphi}\dot{\varphi}) \quad (a) \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} - 2\omega_{b\varphi}\dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = K_J(1 - \beta_{\varphi u}u^2 - \beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)(-c_{\varphi u}u + c_{\varphi\varphi}\varphi - b_{\varphi u}\dot{u} + b_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}) \quad (b)$$

V rovnicích (1), (2) jsme označili: ω_u - vlastní frekvence vertikálního pohybu, ω_φ - rotační vlastní frekvence, ω_{bu} , $\omega_{b\varphi}$ - tlumení. Součinitele β_{ij} a γ_{ij} reprezentují násobky nelineární části a tvoří nesymetrické matice. Parametry c_{ij} , b_{ij} tvoří rovněž nesymetrické matice a mohou být považovány za dobře známé aeroelastické derivace, které je nutné stanovit pomocí experimentů. Koeficienty K_J , K_m závisí na geometrii průřezu a vyjadřují charakteristiky větru:

$$K_m = \frac{1}{2m} \rho V^2 \cdot 2d \quad ; \quad K_J = \frac{1}{2J} \rho V^2 \cdot 2d^2 \quad (3)$$

přičemž: V - rychlost větru, d - hlavní (typický) rozměr průřezu, ρ - hustota vzduchu za běžných podmínek.

Zavedeme-li externí buzení na pravé straně rovnice (1a), bude posunutí $u(t)$ rozdílné od nuly, zatímco rotace $\varphi(t)$ může být za určitých podmínek identicky nulová. Podobný výsledek obdržíme, pokud externí buzení zavedeme pouze na pravé straně rovnice (1b). Výše uvedené úvahy platí analogicky pro soustavu rovnic (2). Zhruba řečeno, modely (1) a (2) jsou orientovány na nelinearity, které jsou popsány rychlostmi a výchylkami. V tomto smyslu mohou být srovnávány s pohybovými rovnicemi systému s jedním stupněm volnosti s nelineární tuhostí (Duffingova rovnice) kombinované s rovnicí, kde nelineární tlumení je funkcí kvadrátu rychlosti odezvy (Rayleighova rovnice), nebo naopak v kombinaci s rovnicí, kde skutečný útlum závisí na kvadrátu výchylky (Van der Polova rovnice). V důsledku toho nazýváme systém (1) systémem Rayleigh-Duffingovým a rovnici (2) systémem Van der Pol-Duffingovým.

2. Vyšetřování stability

Soustředíme se nyní na případ, kdy je systému umožněno pohybovat se pouze s rotačním stupněm volnosti. Ačkoliv se jedná o zjednodušující předpoklad, dovoluje provést analýzu nejdůležitějších vlastností modelu a porozumět vlivu jednotlivých parametrů či najít zrod anebo zánik periodické orbity při změně charakteru stability. Vyšetřování stability nelineárního systému v okolí stacionárních bodů může být v prvním kroku provedeno pomocí odpovídajícího lineárního modelu, přičemž je nutné mít na zřeteli omezení takového kroku, například jedná-li se o analýzu v okolí bodu známého jako střed lineárního systému, nebo potřebujeme-li znát oblasti asymptotické stability.

Relativně jednoduchý postup použijeme v situaci, kdy je stacionární bod hyperbolický, a tedy všechna vlastní čísla linearizační (Jacobiho) matice mají nenulovou reálnou část. Jsou-li však vlastní čísla Jacobiho matice v rovnovážném bodě ryze imaginární, nemůže být lokální dynamika v jeho okolí popsána jen na základě znalosti těchto vlastních čísel. Zda je rovnovážný bod stabilní, nestabilní nebo asymptoticky stabilní, závisí totiž na vyšších, nelineárních, členech rozvoje.

Úsudek ohledně stability rovnovážného bodu si můžeme udělat na základě rozboru vlastností vhodné pomocné funkce zvané Ljapunovova funkce Φ . Její totální časový diferenciál Ψ lze identifikovat s mírou změny funkce Φ podél trajektorie představující řešení systému v bodě fázové roviny. K sestavení Ljapunovovy funkce neexistuje obecná metoda a často jsme odkázáni na metodu pokusu a omylu. Nicméně použijeme-li některé obecné vlastnosti mechanického systému, můžeme obdržet uspokojivé výsledky. Například nástroje založené na energetické bilanci anebo na prvních integrálech systému jsou mnohdy velmi efektivní. Některé návrhy a procedury této metody lze nalézt například v monografii Glendinning (1993). Pokud systém obsahuje několik prvých integrálů, lze Ljapunovovu funkci psát jako jejich lineární kombinaci. Koeficienty této lineární kombinace lze považovat za Lagrangeovy multiplikátory, přičemž je nutné je stanovit tak, aby výsledná funkce měla vlastnosti pozitivně definitní kvadratické formy.

Ljapunovovu funkci stanovíme na základě poměrně jednoduchých vztahů známých z elementární algebry, které lze využít při konstruování pozitivně definitních nebo negativně definitních funkcí. Předpokládáme tedy funkci ve tvaru:

$$\Phi(\varphi, \psi) = k\varphi^2 + l\varphi\psi + m\psi^2 \quad (4)$$

Tato funkce je pozitivně, respektive negativně definitní pouze tehdy, je-li $k, m > 0$, respektive $k, m < 0$ a $4km - l^2 < 0$, respektive $4km - l^2 > 0$. Systém je stabilní, pokud je totální derivace Ljapunovovy funkce podle času negativně definitní.

2.1. Rayleigh-Duffingova a Van der Pol-Duffingova verze rovnice

Pokud uplatníme předpoklady uvedené v předchozím odstavci, můžeme Rayleigh-Duffingův systém napsat v následujícím redukováném tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= -[2\omega_{b\varphi} - K_J b_{\varphi\varphi}(1 - \gamma_{\varphi\varphi}\psi^2)]\psi - [\omega_{\varphi}^2 - K_J c_{\varphi\varphi}(1 - \beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)]\varphi,\end{aligned}\quad (5)$$

zatímco Van der Pol-Duffingova verze rovnice by měla následující zápis:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= -[2\omega_{b\varphi} - K_J b_{\varphi\varphi}(1 - \beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)]\psi - [\omega_{\varphi}^2 - K_J c_{\varphi\varphi}(1 - \beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)]\varphi.\end{aligned}\quad (6)$$

Souřadnice rovnovážných bodů lze určit z řešení příslušných algebraických rovnic vyplývajících z rovnice (5) nebo (6) a z požadavku, aby první derivace na levé straně rovnic byly nulové. Každý z těchto systémů připouští tři nezávislá řešení. Prvé řešení odpovídá případu, kdy je jak rychlost, tak výchylka rovna nule:

$$\varphi = 0; \quad \dot{\varphi} = \psi = 0 \quad (7)$$

Druhé a třetí řešení zahrnuje nulovou rychlost, což plyne z první rovnice, zatímco druhá rovnice získá tvar:

$$\varphi = 0; \quad \dot{\varphi} = \psi = \pm \sqrt{(K_J c_{\varphi\varphi} - \omega_{\varphi}^2)/(K_J \beta_{\varphi\varphi} c_{\varphi\varphi})} = \pm a \quad (8)$$

Těmito kroky zjistíme polohu všech tří rovnovážných bodů: $P_1 = (0, 0)$ a $P_{2,3} = (\pm a, 0)$. Body P_2 a P_3 jsou vzhledem k počátku symetricky položeny na ose x , tudíž je možné se zabývat pouze jedním z nich. Abychom mohli analyzovat rovnovážný stav v bodě P_2 , zavedeme užitečnou transformaci, která nám daný a bod přesune do počátku souřadnicového systému.

$$\varphi = a + \xi; \quad \psi = 0 + \zeta \quad (9)$$

Pro transformovanou Rayleigh-Duffingovu rovnici (5) potom platí:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= -[2\omega_{b\varphi} - K_J b_{\varphi\varphi}(1 - \gamma_{\varphi\varphi}\zeta^2)]\zeta - [\omega_{\varphi}^2 - K_J c_{\varphi\varphi}(1 - \beta_{\varphi\varphi}(u + a)^2)](\xi + a)\end{aligned}\quad (10)$$

2.2. Analýza stability

V předchozích odstavcích jsme stanovili, že systém má tři rovnovážné stavy v bodech P_1 , P_2 a P_3 . Linearizované rovnice vektorového pole daného pravými stranami rovnic (5) či (6) vedou na charakteristickou rovnici a k vlastním číslům Jacobiho matice, kterou píšeme:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & ; & 1 \\ -[\omega_{\varphi}^2 - c_{\varphi\varphi}K_J(1 - 3\beta_{\varphi\varphi}\varphi^2)] & ; & -[2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J(1 - 3\gamma_{\varphi\varphi}\psi^2)] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Charakteristickým polynomem v bodě P_1 je následující rovnice:

$$\Delta = \lambda^2 + \lambda(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J) + \omega_{\varphi}^2 - c_{\varphi\varphi}K_J \quad (12)$$

Obdobně v bodě P_2 obdržíme charakteristický polynom ve tvaru:

$$\Delta = \lambda^2 + \lambda(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J) - 2\omega_{\varphi}^2 + 2c_{\varphi\varphi}K_J \quad (13)$$

Nyní již není obtížné vypočítat vlastní čísla v místě rovnovážných bodů, které budou využity při hodnocení typu stability původních nelineárních systémů kromě několika singulárních případů. V bodě P_1 lze vlastní čísla stanovit z rovnice (12) s tímto výsledkem:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J)^2 - 4(\omega_\varphi^2 - c_{\varphi\varphi}K_J)} \quad (14)$$

Vlastní čísla v bodě P_2 obdržíme ze vztahu (13):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2\omega_{b\varphi} - b_{\varphi\varphi}K_J)^2 - 8(\omega_\varphi^2 - c_{\varphi\varphi}K_J)} \quad (15)$$

Samotná analýza stability se provede na základě Jacobiho matice (11).

V další části této kapitoly jsou vykresleny průběhy derivace Ljapunovovy funkce na trajektorii reprezentující řešení systému a umožňující stanovit, zda se jedná o stabilní rovnovážný bod či nikoliv. Pochopitelně to závisí na výběru parametrů. Jak je patrné z obr. 2, 3 a obr. 4, 5, Ljapunovovy funkce Φ a jejich derivace Ψ jsou zobrazeny pomocí vrstevnic. Přerušované čáry znázorňují negativní hodnoty, tučně značené čáry jsou vrstevnice nulových hodnot obou funkcí a plně čáry zobrazují kladné hodnoty.

Máme-li vzorce pro výpočet vlastních čísel, dokážeme z nich vyčíst, že o charakteru stability rovnovážných bodů rozhodují v podstatě dva klíčové parametry. V případě rovnice Rayleigh-Duffingova typu, rovnice (5), se jedná o následující vztahy:

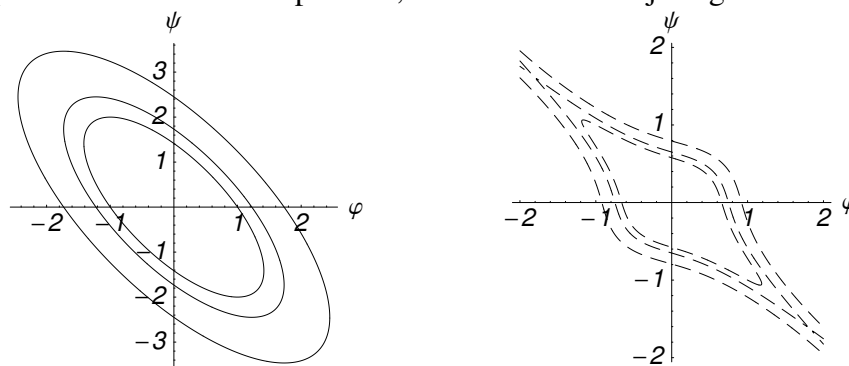
$$r_{1R} = 2\omega_{b\varphi} - K_J b_{\varphi\varphi} \quad ; \quad r_{2R} = \omega_\varphi^2 - c_{\varphi\varphi} K_J. \quad (16)$$

V případě rovnice Van der Pol-Duffingovy dané soustavou (6) obdržíme analogickými kroky (nicméně s poněkud rozdílným výsledkem) dva parametry, které značíme r_{1V} and r_{2V} .

Grafy na obr. 2 jsou příkladem Ljapunovovy funkce a její časové derivace vztahující se k systému (5) v okolí bodu P_1 . Obě funkce jsou popsány rovnicemi:

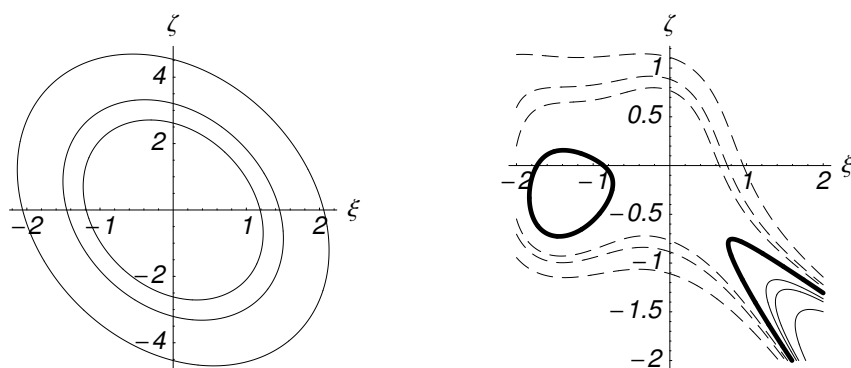
$$\Phi = \varphi^2 + \psi\varphi + \frac{\psi^2}{2} \quad ; \quad \Psi = -3\varphi^4 - 3\psi\varphi^3 - \varphi^2 - 6\psi^3\varphi - \psi\varphi - 6\psi^4 - \psi^2 \quad (17)$$

Funkce Φ je pozitivní v celém okolí počátku, zatímco funkce Ψ je negativní.



Obr. 2. Příklad Ljapunovovy funkce (vlevo) a její derivace (vpravo) systému (5) v okolí bodu P_1 . $r_{1R} > 0$, $r_{2R} > 0$ a $r_{1R}^2 - 4r_{2R} > 0$; rovnovážný bod je stabilní.

Na obr. 3 je demonstrován průběh obou funkcí v okolí bodu P_2 .

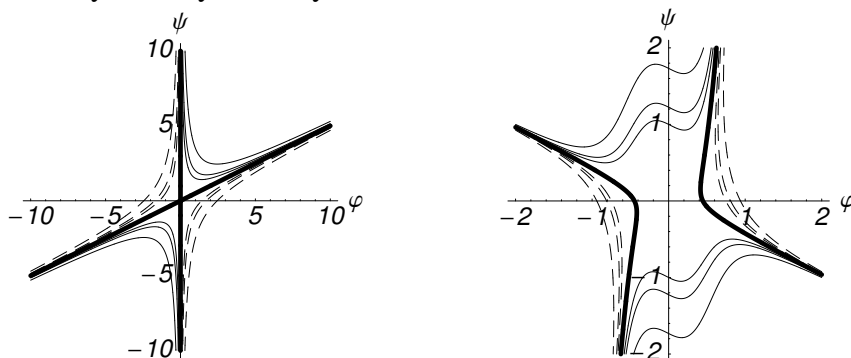


Obr. 3. Příklad Ljapunovy funkce (vlevo) a její derivace (vpravo) systému (5) v okolí bodu P_2 . $r_{1R} > 0$, $r_{2R} < 0$ a $r_{1R}^2 - 8r_{2R} > 0$. Rovnovážný bod je stabilní.

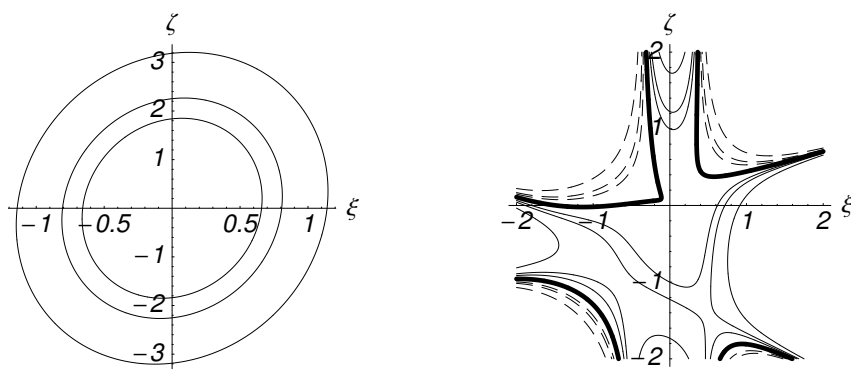
Další dva příklady na obr. 4 a 5 dokumentují chování Ljapunovy funkce a její derivace vztahujících se k Van der Pol-Duffingově rovnici v bodech P_1 a P_2 . V okolí bodu P_1 platí pro tyto funkce vztahy:

$$\Phi = \varphi\psi - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \Psi = -5\varphi^4 - 10\psi\varphi^3 + \varphi^2 + \psi\varphi + \psi^2 \quad (18)$$

Z obrázků je patrné, že speciální výběr parametrů r_{1V} a r_{2V} vede k tomu, že funkce Φ může reprezentovat kritický sedlový bod a systém ztratí v tomto bodě stabilitu.



Obr. 4. Příklad Ljapunovy funkce (vlevo) a její derivace (vpravo) systému (6) v okolí bodu P_1 . $r_{1V} < 0$, $r_{2V} < 0$ and $r_{1V}^2 - 4r_{2V} > 0$. Rovnováža je nestabilní.



Obr. 5. Příklad Ljapunovy funkce (vlevo) a její derivace (vpravo) systému (6) v okolí bodu P_2 . $r_{1V} > 0$, $r_{2V} < 0$ and $r_{1V}^2 - 8r_{2V} > 0$. Rovnovážný bod je nestabilní.

2.3. Ryze imaginární a nulová vlastní čísla

Podívejme se na případ stability a bifurkace rovnováhy soustavy rovnic (5), když vlastní čísla příslušné Jacobiho matice vytvářejí ryze imaginární dvojici. K tomuto případu dojde, viz vzorec (14), budou-li splněny následující podmínky:

$$r_1 = 0 \quad ; \quad r_2 > 0 \quad (19)$$

Podmínky (19) jsou obecně platné jak pro rovnici Rayleigh-Duffingovu, tak i pro její Van der Pol-Duffingovu verzi.

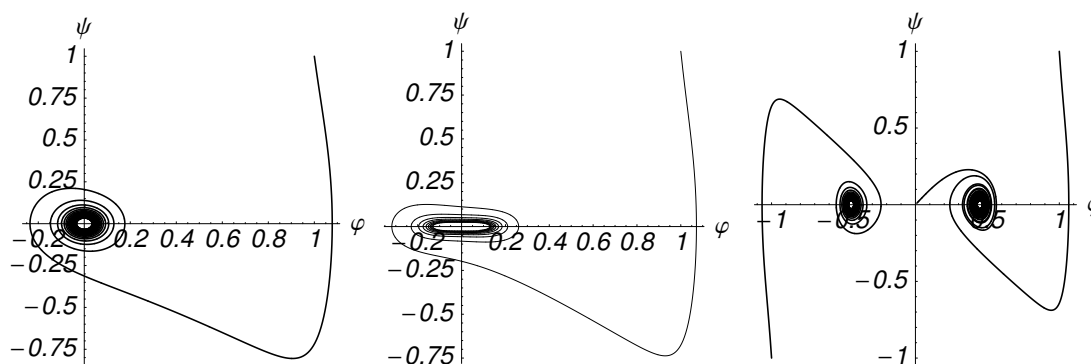
Překračují-li vlastní čísla Jacobiho matice imaginární osu, dochází ke změně typu stability. Tento jev je znázorněn na obr. 6 a 7. Za této situace procházíme degenerovaným případem soustavy rovnic (5), kterou můžeme psát v takovém případě ve tvaru:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= -b_{\varphi\varphi}K_J\gamma_{\varphi\varphi}\psi^3 - (\omega^2 - K_{JC\varphi\varphi})\varphi - \beta_{\varphi\varphi}K_{JC\varphi\varphi}\varphi^3 \end{aligned} \quad (20)$$

Levý graf v obr. 6 znázorňuje případ řešení soustavy rovnic (20), když $r_1 = 0$ a $r_2 > 0$. S využitím převedení systému do Jordanova tvaru a s využitím vlastností Ljapunovovy funkce a principu invariance zjistíme, že počátek je asymptoticky stabilní. Řešíme situaci ryze imaginární dvojice vlastních čísel, která vede ke spirálovému rovnovážnému bodu.

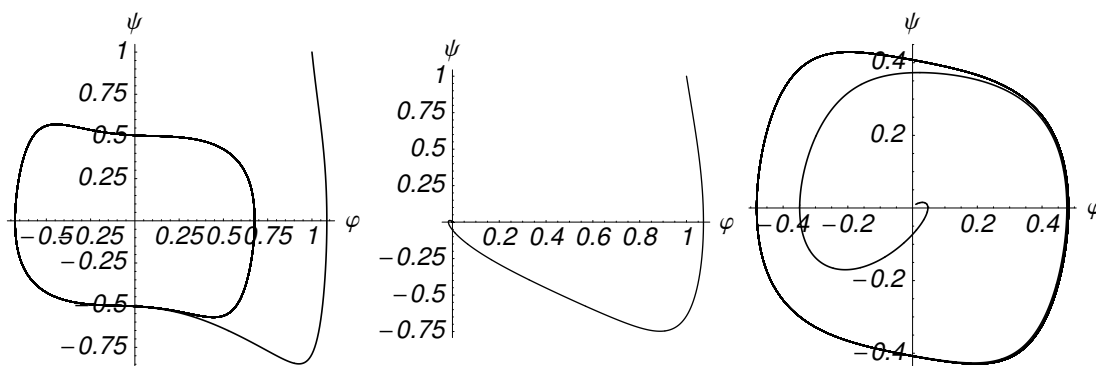
Pokud je $r_1 = r_2 = 0$, dochází ke speciálnímu případu. Počátek je asymptoticky stabilní, nicméně přibližování již není exponenciální, protože se nejedná o hyperbolický rovnovážný bod soustavy rovnic (20).

Konečně pravý graf na obr. 6 reprezentuje případ, kdy dojde k porušení druhé podmínky (19). Jedná se o stav, kdy $r_1 = 0$ a $r_2 < 0$. Vlastní čísla jsou reálná se shodnou absolutní hodnotou. Počátek P_1 je nestabilní a v rovině vzniknou dva asymptoticky stabilní body P_2, P_3 .



Obr. 6. Fázový diagram degenerovaného případu popsaného soustavou pohybových rovnic (20).

Na obr. 7 je patrný vznik superkritického limitního cyklu. Překročíme-li s vlastními čísly imaginární osu, dostáváme nestabilní počátek a limitní cyklus - levý graf. Prostřední graf představuje případ, když je počátek asymptoticky stabilní jako důsledek podmínek $r_1 > 0$ a $r_2 > 0$. Pravý graf zobrazuje případ, kdy $r_1 < 0$ a $r_2 > 0$.

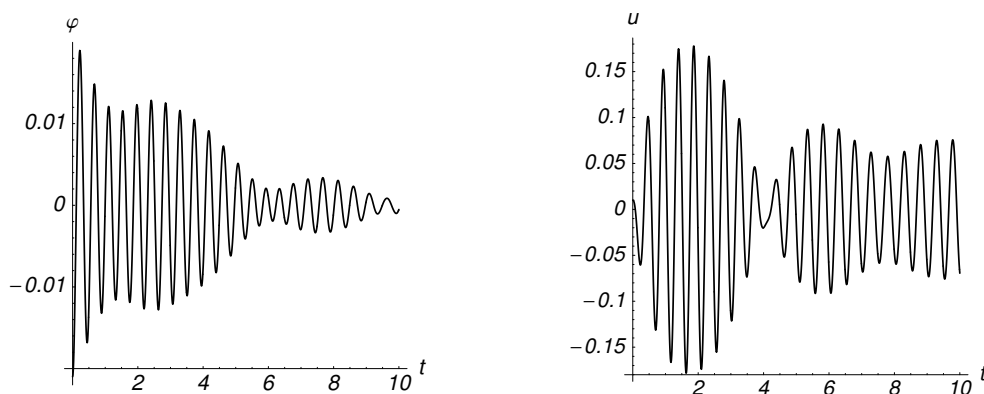


Obr. 7. Vibrace se vznikem superkritického limitního cyklu.

3. Experimentální řešení

Návrh poddajných konstrukcí, který respektuje vliv nestabilit typu flutter, se neobejde bez experimentálního a numerického modelování. Experimentální činnost v aeroelasticitě se po dlouhou dobu orientovala na získání tzv. aeroelastických derivací a na stanovení kritického stavu, resp. získání bodů počátku aeroelastické nestability. V současnosti se jedná o poměrně dobře zvládnutý úkol, který však nevyhovuje skutečné podstatě flutteru, kde dochází k „okamžitému“ zlomu stability s velkou amplitudou odezvy. Z hlediska základního výzkumu, jakož i z hlediska použitelnosti a doby života konstrukce, je důležité získat informaci o chování systému nejen před krizovým stavem, nýbrž také během přechodu a především v postkritickém stadiu.

Autoři provedli řadu numerických analýz a experimentálních měření pro proměnlivé parametry a počáteční podmínky. Ukázalo se, že odezva je mimořádně citlivá na jejich velmi malé odchylky. Ilustrační příklad výsledků numerického modelování odezvy nosníku pojatého jako soustava se dvěma stupni volnosti je předveden na obr. 8. V okolí kritického bodu může amplituda vibrací dramaticky vzrůstat, může dojít ke stabilizaci a k opětovnému nárůstu, přičemž dochází k přelévání energie mezi dvěma tvary kmitání - stupni volnosti. Numericky byla tato analýza provedena pro více hodnot parametrů, včetně rychlosti větru.



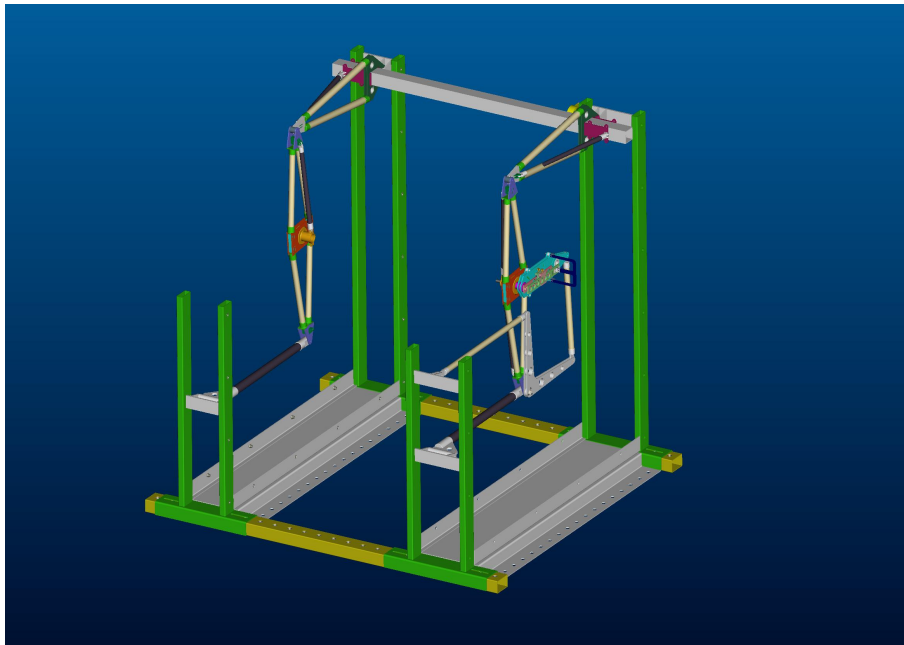
Obr. 8. Časový průběh rotačního pohybu φ (vlevo) a lineární výchylky u (vpravo) zjištěné numerickým výpočtem; hodnota koeficientů β_{ij}, γ_{ij} atd. zůstávala konstantní; na obrázku je zřetelné přelévání energie mezi dvěma stupni volnosti.

Při experimentech bylo využito nového zkušebního zařízení podle obr. 9, jež bylo vyvinuto speciálně pro aeroelastické zkoušky a popsáno v publikaci Náprstek (2007). Umožňuje respektovat matematické předpoklady zároveň s možností velmi rychlé obsluhy při změně parametrů

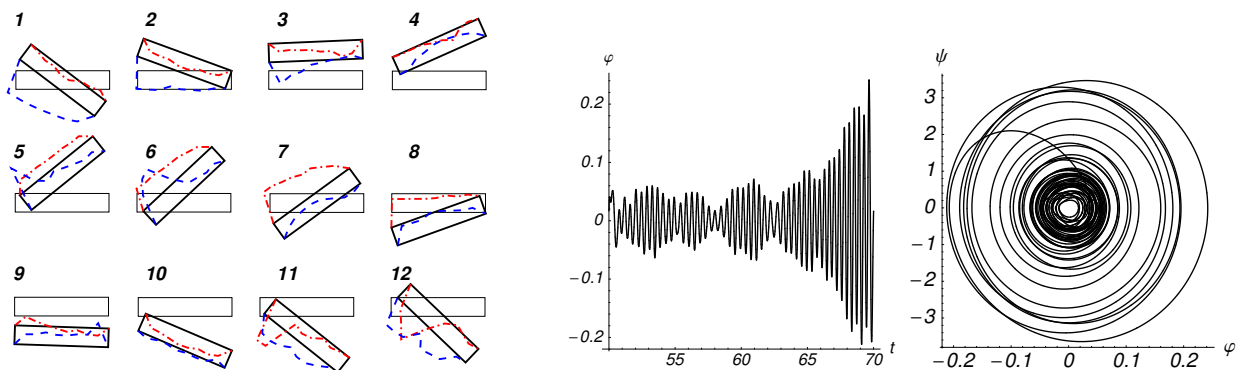
konstrukce. Po připevnění testovaného profilu na zkušební zařízení se měřily tlakové síly jak při pohybech s malými (lineárními) výchylkami, tak i při pohybech s vysokými amplitudami.

Zkoumaly se případy, kdy docházelo ke ztrátě stability za podmínek, kdy během experimentu se rychlost proudu v aerodynamickém tunelu rovnoměrně zvyšovala. Zvláštní pozornost se věnovala detailní odezvě testované soustavy v postkritickém stavu především v rotační složce, kdy jsou lineární modely zcela nedostatečné. Jeden z takových případů se vznikem limitního cyklu je znázorněn na obr. 10. Ukázalo se, že rotace nosníku před dosažením bifurkačního bodu jsou nepatrné. Při zachování konstantní rychlosti proudu (větru) získal limitní cyklus podobu Rayleigh-Duffingova typu.

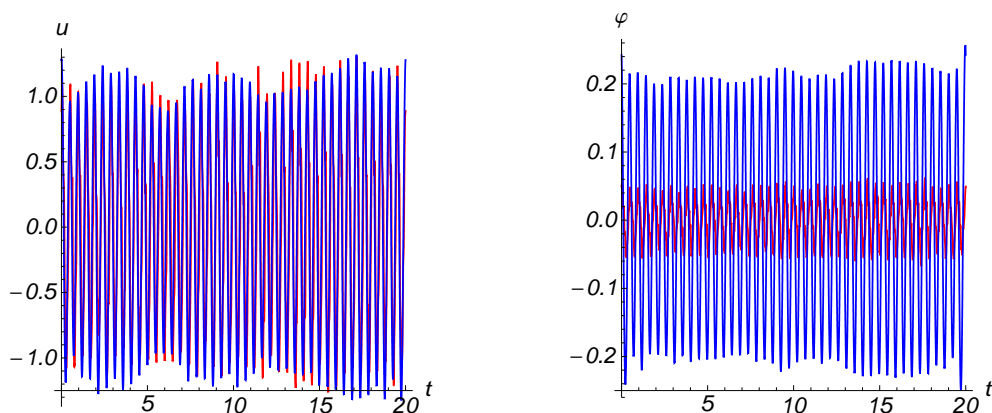
Studovaly se tři typy nosníku pro různé poměry stran obdélníkového profilu. Jejich výchylky se měřily akcelerometry. Příklad výsledků měření je uveden na obr. 10 a 11. Tento případ je vztažen k výsledkům odezvy s vysokými amplitudami na modelu obdélníkového průřezu s poměrem stran 1:5 umístěného v měřicím zařízení.



Obr. 9. Nové vibrační zařízení určené k identifikaci nelineárních aeroelastických jevů.



Obr. 10. Vlevo: pohyby zkušební tělesa s velkými amplitudami v aerodynamickém tunelu; čerchovaná čára naznačuje tlaky na povrchu tělesa; tlaky směřující ven z tělesa jsou kladné, tlaky směřující dovnitř jsou záporné; vpravo: odezva konstrukce a fázový diagram získaný z experimentů za rostoucí rychlosti proudu až do stádia vzniku limitního cyklu.



Obr. 11. Lineární identifikace aeroelastických derivací na modelu mostu pro výchylku (vlevo) a kroucení (vpravo).

Tlaky byly zaznamenávány celkem šestnácti tlakovými snímači vyústěnými na povrchu modelů. Čerchovaná čára v levé části obr. 10 představuje tlaky na vrchní ploše tělesa, čárkovaná čára tlaky na spodním líci. Tato strategie dovolila porovnání nejen odezvy nosníků, nýbrž i sil v jednotlivých bodech povrchu.

Tato procedura byla využita následujícím způsobem: výchylky a pootočení experimentálně získané v aerodynamickém tunelu byly dosazeny do levých stran rovnic (1). V dalším kroku byly vyhodnoceny pravé strany, které reprezentují aeroelastické tlaky. Srovnání výsledků pro levou stranu (modrá křivka) a pravou stranu (červená křivka) je patrné z obr. 11. Dá se říci, že v případě svislého posuvu u , rovnice (1a), si obě křivky dobře odpovídají - levý graf. Z porovnání křivek pro pootočení φ , rovnice (1b) - pravý graf, vyplývají jisté rozdíly mezi levou a pravou stranou. Příčinou je lineární model použitý pro identifikaci. Jeho nedostatečnost za běžných podmínek se mnohem výrazněji projevuje u pootočení φ než u posuvu u .

4. Závěr

Podrobná analýza nelineárního matematického modelu krouživě-ohybového flutteru umožnila teoretický popis řady vlastností tohoto aeroelastického jevu. Tento rozbor v sobě obsahuje lineární přístup charakteristický pro nízké rychlosti proudu, když systém prochází podkritickým stabilním režimem. Hlavním přínosem v příslušné diferenciální soustavě jsou však nelineární části Duffingova, Rayleighova a Van der Polova typu v zobecněné vícesložkové formě, která se vyznačuje cyklickou symetrií. Tyto nelineární členy působí jako logická expanze lineárního přístupu. Proces matematického modelování sledoval spíše intuitivní kroky a inherentní popis chování procesů známých z experimentů a numerických řešení ve dvojrozměrném i třírozměrném prostoru.

Základní vlastnosti nelineárního systému byly prozkoumány v oblasti přechodů hranic stability. Byly posouzeny možnosti postkritické restabilizace na úrovni stabilních limitních cyklů (v případě jejich existence). Za použití navržených nelineárních členů a modelů lze popsat řadu poměrně známých efektů typických pro postkritické režimy rozličného typu. Mezi jinými bylo detekováno několik druhů rozvětvení rovnováhy s očividnými větvemi stabilní a nestabilní rovnováhy. Význačným výsledkem je sestavení podmínek existence a příslušných portrétů limitních cyklů. S tím souvisí identifikace kvazi-periodického, často výrazně nesymetrického přenosu energie mezi jednotlivými stupni volnosti. K rozboru chování systému v okolí rovnovážných bodů byla využita Jacobiho matice vektorového pole.

Po ztrátě stability triviálního řešení má systém s jedním stupněm volnosti snahu stabilizovat

se ve formě harmonického nebo periodického řešení. Růstu amplitud odezvy po ztrátě stability je zamezeno významnou energetickou bariérou. Systém má sklon k odezvě ve všech složkách pohybu. Pokud dojde k překonání této energetické bariéry, systém se destabilizuje a jeho odezva začne růst nade všechny meze. Tento typický proces má několik mezistupňů a speciálních stavů, které vznikají na základě vhodných kombinací parametrů naznačených v textu. Ljapunovova metoda se ukázala jako velmi cenná při poskytnutí obrazu o chování systému v případě mnoha stavů, kombinací parametrů a počátečních podmínek.

Výsledky, ke kterým dospěli autoři v tomto článku, závisí do jisté míry na hodnotách vstupních parametrů. V praktických případech tyto parametry mohou být identifikovány experimentálně a za použití nekonvenčních metod, které kombinují měření a numerické postupy. Na vývoji těchto metod se intenzivně pracuje.

Poděkování

Autoři děkují Grantové agentuře ČR za podporu v rámci grantů 103/07/J060, 103/06/0099 a A2071401020 a institucionální podpoře AV 0Z 20710524.

Literatura

- Caracoglia L., Jones N.P. (2003) Time domain vs. frequency domain characterization of aeroelastic forces for bridge sections. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **91**, 1135–1150.
- Chen X., Kareem A. (2003) New frontiers in aerodynamic tailoring of long span bridges: an advanced analysis framework. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **91**, 1511–1528.
- Glendinning P. (1994) *Stability, instability and chaos*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Náprstek J. (2000) Non-linear stability of flutter-type vibration in wind. In: *Proc. 7th International Conference on Flow-Induced Vibration FIV2000 19-22 June* (S. Ziada and T. Staubli eds). Balkema, Rotterdam: Lucerne, pp. 445-454.
- Náprstek J. (2001) Stability domains of wind-excited random non-linear systems through Lyapunov function. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **89**, 1499–1512.
- Náprstek J., Pospíšil S., Hračov S. (2007) Analytical and experimental modelling of non-linear aeroelastic effects on prismatic bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **95**, 1315-1328.
- Ricciardelli F., de Grenet E.T., Hangan H. (2002) Pressure distribution, aerodynamic forces and dynamic response of box bridge sections. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **90**, 1135–1150.
- Strømmen E. (2006) *Theory of Bridge Aerodynamics*. Springer, Berlin.
- Tondl A. (1997) To the analysis of autoparametric systems. *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 77, 6, 407–418.
- Tondl, A. (1999) Non-linearly coupled systems. In: *Proc. Engineering Mechanics '99* (C. Kratochvíl et al. eds). ÚMT FS Brno, Svratka, pp.87-96.